

Fiche 1 : espérance, variance et écart-type

Huit exercices pour maîtriser l'espérance et la variance :

- espérance, variance, écart-type d'une loi donnée ;
- un dé et un gain affine ;
- un jeu de loterie ;
- transformation affine et variable centrée réduite ;
- la loi de Bernoulli et sa variance maximale ;
- linéarité de l'espérance ;
- un script Python ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- la loi est écrite sous forme de tableau ;
- la formule utilisée est citée ;
- $E(X^2)$ est calculée séparément avant la variance ;
- le résultat est **interprété** (gain moyen, dispersion) ;
- la conclusion nomme la propriété (linéarité, transformation affine).

Le modèle de rédaction d'un calcul d'espérance et de variance

« La variable X prend les valeurs $-1, 0, 2, 5$ avec les probabilités $0,1, 0,3, 0,4, 0,2$.

$$E(X) = -1 \times 0,1 + 0 \times 0,3 + 2 \times 0,4 + 5 \times 0,2 = 1,7.$$

$$E(X^2) = 1 \times 0,1 + 0 + 4 \times 0,4 + 25 \times 0,2 = 6,7. \text{ D'après la formule de König-Huygens :}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 6,7 - 1,7^2 = 3,81. \text{ Donc } \sigma(X) = \sqrt{3,81} \approx 1,95. \text{ »}$$

- Vérifie que **la somme des probabilités vaut 1**.
- Calcule $E(X)$, puis $E(X^2)$, puis $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
- **Interprète** : « en moyenne... », « écart typique de... ».

Les pièges classiques

- Oublier de **mettre au carré** les valeurs dans $E(X^2)$, ou calculer $(E(X^2))$ à la place de $E(X)^2$.
- Écrire $V(aX + b) = aV(X) + b$: c'est $a^2V(X)$.
- Écrire $\sigma(aX) = a\sigma(X)$ pour $a < 0$: c'est $|a|\sigma(X)$.
- Trouver une **variance négative** sans s'alerter.

Une variance négative, c'est comme une distance négative : ça n'existe pas, et ça dit surtout que tu as fait une erreur de signe quelque part.

Exercice 1 (★) : une loi discrète

Une variable aléatoire X a pour loi :

x_i	-1	0	2	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Correction de l'exercice 1

Les probabilités ont pour somme $0,1 + 0,3 + 0,4 + 0,2 = 1$.

$$E(X) = -1 \times 0,1 + 0 \times 0,3 + 2 \times 0,4 + 5 \times 0,2 = -0,1 + 0 + 0,8 + 1$$

$$E(X) = 1,7$$

$$E(X^2) = (-1)^2 \times 0,1 + 0 + 2^2 \times 0,4 + 5^2 \times 0,2 = 0,1 + 1,6 + 5$$

$$E(X^2) = 6,7$$

D'après la formule de König-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 6,7 - 2,89$$

$$V(X) = 3,81$$

$$\sigma(X) = \sqrt{3,81} \approx 1,95$$

Exercice 2 (★★) : un dé et un gain

On lance un dé équilibré à six faces. Soit X le résultat.

1. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
2. Un joueur gagne $2X - 5$ euros. On note $G = 2X - 5$. Calculer $E(G)$, $V(G)$ et $\sigma(G)$.

Correction de l'exercice 2

Question 1

Chaque valeur de 1 à 6 a la probabilité $\frac{1}{6}$.

$$E(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6}$$

$$E(X) = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$E(X^2) = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \frac{91}{6}$$

$$V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{182 - 147}{12}$$

$$V(X) = \frac{35}{12} \approx 2,92$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1,71$$

Question 2

$G = 2X - 5$ est une transformation affine de X .

$$E(G) = 2E(X) - 5 = 7 - 5$$

$$E(G) = 2$$

$$V(G) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{35}{12}$$

$$V(G) = \frac{35}{3} \approx 11,67$$

$$\sigma(G) = |2| \sigma(X) = 2\sqrt{\frac{35}{12}} \approx 3,42$$

Interprétation : le joueur gagne en moyenne 2 € par partie, avec un écart typique de 3,42 €.

Exercice 3 (★★) : une loterie

Un ticket de loterie coûte 5 €.

Il rapporte 100 € avec la probabilité 0,01, 10 € avec la probabilité 0,1 et rien sinon.

On note G le gain **net** (rapport moins la mise).

1. Donner la loi de G .
2. Calculer $E(G)$, $V(G)$ et $\sigma(G)$. Interpréter $E(G)$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

Gain net : $100 - 5 = 95$ (probabilité 0,01), $10 - 5 = 5$ (probabilité 0,1), -5 sinon (probabilité $1 - 0,01 - 0,1 = 0,89$).

g_i	-5	5	95
$P(G = g_i)$	0,89	0,1	0,01

Question 2

$$E(G) = -5 \times 0,89 + 5 \times 0,1 + 95 \times 0,01 = -4,45 + 0,5 + 0,95$$

$$E(G) = -3$$

$$E(G^2) = 25 \times 0,89 + 25 \times 0,1 + 9025 \times 0,01 = 22,25 + 2,5 + 90,25 = 115$$

$$V(G) = 115 - (-3)^2$$

$$V(G) = 106$$

$$\sigma(G) = \sqrt{106} \approx 10,30$$

Interprétation : en moyenne, un joueur **perd 3 €** par ticket. Le jeu est défavorable au joueur.

Exercice 4 (★★) : transformation affine

Soit X une variable aléatoire avec $E(X) = 3$ et $V(X) = 4$.

1. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de $Y = -2X + 5$.
2. Calculer l'espérance et la variance de $Z = \frac{X-3}{2}$. Comment appelle-t-on Z ?

Correction de l'exercice 4

Question 1

$$E(Y) = -2 \times 3 + 5$$

$$E(Y) = -1$$

$$V(Y) = (-2)^2 \times 4$$

$$V(Y) = 16$$

$$\sigma(Y) = |-2| \times \sigma(X) = 2 \times 2 = 4$$

Question 2

$$\sigma(X) = \sqrt{4} = 2, \text{ et } Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

$$E(Z) = \frac{E(X) - 3}{2} = 0$$

$$V(Z) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times V(X) = \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

Z est la variable centrée réduite associée à X : $E(Z) = 0$ et $V(Z) = 1$.

Exercice 5 (★★★) : la variance d'une loi de Bernoulli

Soit X une variable de Bernoulli de paramètre p .

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Étudier la fonction $f : p \mapsto p(1 - p)$ sur $[0; 1]$. Pour quelle valeur de p la variance est-elle maximale ? Quelle est cette valeur maximale ?

Correction de l'exercice 5

Question 1

X prend la valeur 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $1 - p$.

$$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p)$$

$$E(X) = p$$

$$X^2 = X \text{ (car } 0^2 = 0 \text{ et } 1^2 = 1), \text{ donc } E(X^2) = p.$$

$$V(X) = p - p^2$$

$$V(X) = p(1 - p)$$

Question 2

$$f(p) = p - p^2 \text{ est dérivable sur } [0; 1] \text{ et } f'(p) = 1 - 2p.$$

$$f'(p) > 0 \iff p < \frac{1}{2}. \text{ Donc } f \text{ est croissante sur } \left[0; \frac{1}{2}\right] \text{ et décroissante sur } \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

La variance est maximale pour $p = \frac{1}{2}$, et vaut $\frac{1}{4}$.

Conséquence : pour tout p , $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$. On utilisera cette majoration avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 6 (★★) : linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires avec $E(X) = 2$, $E(X^2) = 5$ et $E(Y) = -1$.

1. Calculer $E(3X - 2Y + 4)$.
2. Calculer $V(X)$, puis $V(3X + 4)$.
3. Peut-on calculer $V(3X - 2Y + 4)$ avec ces données ?

Correction de l'exercice 6

Question 1

Par linéarité de l'espérance :

$$E(3X - 2Y + 4) = 3E(X) - 2E(Y) + 4 = 6 + 2 + 4$$

$$E(3X - 2Y + 4) = 12$$

Question 2

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 5 - 4$$

$$V(X) = 1$$

$$V(3X + 4) = 3^2 V(X)$$

$$V(3X + 4) = 9$$

Question 3

Non. Pour calculer $V(3X - 2Y + 4)$, il faudrait connaître $V(Y)$ et savoir si X et Y sont indépendantes (si oui : $V = 9V(X) + 4V(Y)$).

On ne peut pas conclure avec ces seules données.

Exercice 7 (★★) : Python

On utilise les fonctions du cours :

```
def esperance(valeurs, probas):
    return sum(x * p for x, p in zip(valeurs, probas))

def variance(valeurs, probas):
    m = esperance(valeurs, probas)
    return sum(p * (x - m)**2 for x, p in zip(valeurs, probas))
```

1. Que renvoient `esperance([-1,0,2,5], [0.1,0.3,0.4,0.2])` et `variance([-1,0,2,5], [0.1,0.3,0.4,0.2])` ?
2. La formule de `variance` est-elle celle de la définition ou celle de König-Huygens ?

Correction de l'exercice 7

Question 1

esperance renvoie 1,7 et **variance** renvoie 3,81 (aux arrondis près, par exemple 3.8100000000000005).

Ce sont les résultats de l'exercice 1.

Question 2

La fonction calcule $\sum p_i (x_i - m)^2$ avec $m = E(X)$: c'est la **définition** de la variance, pas la formule de König-Huygens.

Définition.

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Une variance peut être négative.
2. $E(X + 3) = E(X) + 3$.
3. $V(X + 3) = V(X) + 3$.
4. $\sigma(-2X) = -2\sigma(X)$.
5. $E(X^2) \geq E(X)^2$.

Correction de l'exercice 8

Affirmation 1

$V(X) = \sum p_i (x_i - E(X))^2$ est une somme de termes positifs.

Faux.

Affirmation 2

C'est la propriété $E(aX + b) = aE(X) + b$ avec $a = 1$ et $b = 3$.

Vrai.

Affirmation 3

$V(X + 3) = V(X)$: ajouter une constante ne change pas la dispersion.

Faux.

Affirmation 4

$\sigma(-2X) = |-2| \sigma(X) = 2 \sigma(X)$, un nombre positif.

Faux.

Affirmation 5

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \geq 0$ donc $E(X^2) \geq E(X)^2$.

Vrai.

Ce qui peut tomber au bac

- Le calcul de $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$ à partir d'une loi (exercices 1, 3).
- Un **gain affine** et son interprétation (exercices 2 et 3).
- La **transformation affine** $E(aX + b)$, $V(aX + b)$ (exercices 2, 4, 6).
- La **loi de Bernoulli** et sa variance (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Pour une variable aléatoire X et des réels a et b , $V(aX + b)$ vaut :

- A. $a V(X) + b$
- B. $a^2 V(X) + b$
- C. $a V(X)$
- D. $a^2 V(X)$ (**bonne réponse**)

Justification : Ajouter une constante ne change pas la dispersion, et multiplier par a multiplie la variance par a^2 .

2. Pour $E(X) = 3$, que vaut $E(2X - 5)$?

A. 1 (**bonne réponse**)

B. 6

C. -2

D. 2

Justification : Linéarité : $2E(X) - 5 = 6 - 5 = 1$.

3. La formule de König-Huygens s'écrit :

A. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (**bonne réponse**)

B. $V(X) = E(X)^2 - E(X^2)$

C. $V(X) = E(X^2) + E(X)^2$

D. $V(X) = \sqrt{E(X)}$

Justification : La variance est l'espérance du carré moins le carré de l'espérance.

4. Quelle est l'espérance du résultat d'un dé équilibré à six faces ?

A. 3,5 (**bonne réponse**)

B. 3

C. 4

D. 21

Justification : $\frac{1 + 2 + \dots + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$.

5. Quelle est la variance d'une variable de Bernoulli de paramètre p ?

A. p

B. $p(1 - p)$ (**bonne réponse**)

C. $1 - p$

D. p^2

Justification : $E(X^2) = p$ et $E(X)^2 = p^2$: $V(X) = p - p^2$.

6. Dans l'exercice 2, avec X le résultat d'un dé équilibré et $G = 2X - 5$, que vaut $V(G)$?

A. $2 \times \frac{35}{12}$

B. $\frac{35}{12}$

C. $\frac{35}{6}$

D. $\frac{35}{3}$ (**bonne réponse**)

Justification : $V(G) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{3}$.

7. Dans l'exercice 3 (loterie à 5 €), quelle est l'espérance du gain net G ?

A. -3 (**bonne réponse**)

B. -5

C. 0

D. 5

Justification : $E(G) = -5 \times 0,89 + 5 \times 0,1 + 95 \times 0,01 = -3$: le jeu est défavorable au joueur.

8. Dans l'exercice 4, avec $E(X) = 3$ et $V(X) = 4$, que vaut $V(Y)$ pour $Y = -2X + 5$?

A. 16 (bonne réponse)

B. $-8 + 5$

C. 9

D. 4

Justification : $V(Y) = (-2)^2 V(X) = 4 \times 4 = 16$: le signe de -2 disparaît car on l'élève au carré.

9. Dans l'exercice 5 (variance d'une loi de Bernoulli), pour quelle valeur de p la variance $p(1-p)$ est-elle maximale ?

A. $p = 0$, variance maximale 0B. $p = 1$, variance maximale 1C. $p = \frac{1}{4}$

D. $p = \frac{1}{2}$, avec une variance maximale de $\frac{1}{4}$ (bonne réponse)

Justification : $f'(p) = 1 - 2p$ s'annule en $\frac{1}{2}$, où $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

10. Dans l'exercice 6, avec $E(X) = 2$, $E(X^2) = 5$, $E(Y) = -1$, peut-on calculer $V(3X - 2Y + 4)$ avec seulement ces données ?

A. Oui, car l'espérance suffit

B. **Non, il manque $V(Y)$ et l'indépendance éventuelle de X et Y** (bonne réponse)C. Oui, cela vaut $9V(X) + 4V(Y)$

D. Oui, cela vaut toujours 9

Justification : Sans connaître $V(Y)$ ni l'indépendance de X et Y , on ne peut pas calculer la variance d'une combinaison des deux.