

Contrôle : chapitre 13, Sommes de variables aléatoires et concentration

Durée : 60 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Un jeu de boules numérotées

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 4 portent le numéro 0, 4 portent le numéro 1 et 2 portent le numéro 3. On tire une boule au hasard et on note X le numéro obtenu.

Un joueur participe à un jeu : il verse une mise de 2 euros, tire une boule, puis reçoit 3 euros par point marqué. Son gain algébrique (en euros) est la variable aléatoire $Y = 3X - 2$.

1. Donner la loi de probabilité de X puis calculer son espérance $E(X)$. (1 point)
2. Calculer la variance $V(X)$ à l'aide de la formule de König-Huygens, puis l'écart-type $\sigma(X)$ (arrondi au centième). (1 point)
3. Déterminer l'espérance et la variance du gain $Y = 3X - 2$. Le jeu est-il favorable au joueur ? (1,5 points)
4. Le joueur tire deux fois de suite une boule, avec remise. On note X_1 et X_2 les numéros obtenus et $S = X_1 + X_2$. Justifier que X_1 et X_2 sont indépendantes puis calculer $E(S)$ et $V(S)$. (1,5 points)
5. Un second joueur décide de tirer une seule boule et de doubler son score : il obtient $T = 2X$. Calculer $E(T)$ et $V(T)$ puis comparer avec S . Pourquoi les variances diffèrent-elles alors que les espérances sont égales ? (1 point)

Exercice 2 (7 points) : Contrôle qualité et loi binomiale

Une machine produit des pièces. Chaque pièce est défectueuse avec la probabilité $p = 0,1$, indépendamment des autres. On prélève un lot de 200 pièces et on note X le nombre de pièces défectueuses dans ce lot.

Pour la question 4, on dispose de la fonction Python suivante, dont les bornes de la boucle sont à compléter :

```
from math import comb

def proba():
    s = 0
    for k in range(....., .....):
        s = s + comb(200, k) * 0.1**k * 0.9**(200 - k)
    return s
```

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. (1 point)
2. Dans cette question, n est un entier naturel non nul et $p \in]0; 1[$. Soit X une variable de loi $\mathcal{B}(n; p)$. Démontrer que $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$. En déduire $E(X)$ et $V(X)$ pour le lot de 200 pièces. (2,5 points)
3. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis l'utiliser pour minorer la probabilité que le lot contienne strictement plus de 10 et strictement moins de 30 pièces défectueuses. (1,5 points)
4. On souhaite calculer la valeur exacte de $P(10 < X < 30)$ à l'aide de la fonction Python ci-dessus. Recopier la ligne `for` en complétant les bornes de `range`. L'exécution de `proba()` renvoie environ 0,976 : comparer avec la minoration obtenue à la question 3 et commenter. (2 points)

Exercice 3 (7 points) : Sondage et loi des grands nombres

Dans une ville, une proportion inconnue p des habitants est favorable à un projet. On interroge au hasard, avec remise, n habitants et on note F_n la fréquence des personnes favorables dans l'échantillon. On admet que nF_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

1. Donner l'espérance et la variance de F_n . Montrer que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ puis que, pour tout réel $\delta > 0$, $P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$. (2 points)
2. On interroge $n = 1\,000$ habitants. Montrer que la probabilité que F_n soit à moins de 0,05 de p est supérieure ou égale à 0,9. (1 point)
3. Déterminer le plus petit entier n pour lequel l'inégalité de la question 1 garantit, quelle que soit la valeur de p , que $P(|F_n - p| < 0,02) \geq 0,95$. (1,5 points)
4. Un institut interroge $n = 2\,500$ habitants et observe $F_n = 0,55$. Si la population était partagée à parts égales ($p = 0,5$), majorer la probabilité d'un écart d'au moins 0,05 entre F_n et 0,5. Peut-on douter de l'hypothèse $p = 0,5$ au seuil de 5 % ? (1,5 points)
5. Dédurre de l'inégalité de la question 1 que, pour tout $\delta > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|F_n - p| \geq \delta) = 0$. Interpréter ce résultat. (1 point)