

Contrôle : chapitre 13, Sommes de variables aléatoires et concentration

Durée : 60 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Un jeu de boules numérotées

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 4 portent le numéro 0, 4 portent le numéro 1 et 2 portent le numéro 3. On tire une boule au hasard et on note X le numéro obtenu.

Un joueur participe à un jeu : il verse une mise de 2 euros, tire une boule, puis reçoit 3 euros par point marqué. Son gain algébrique (en euros) est la variable aléatoire $Y = 3X - 2$.

1. Donner la loi de probabilité de X puis calculer son espérance $E(X)$. (1 point)
2. Calculer la variance $V(X)$ à l'aide de la formule de König-Huygens, puis l'écart-type $\sigma(X)$ (arrondi au centième). (1 point)
3. Déterminer l'espérance et la variance du gain $Y = 3X - 2$. Le jeu est-il favorable au joueur ? (1,5 points)
4. Le joueur tire deux fois de suite une boule, avec remise. On note X_1 et X_2 les numéros obtenus et $S = X_1 + X_2$. Justifier que X_1 et X_2 sont indépendantes puis calculer $E(S)$ et $V(S)$. (1,5 points)
5. Un second joueur décide de tirer une seule boule et de doubler son score : il obtient $T = 2X$. Calculer $E(T)$ et $V(T)$ puis comparer avec S . Pourquoi les variances diffèrent-elles alors que les espérances sont égales ? (1 point)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1 point)

$$P(X = 0) = 0,4, P(X = 1) = 0,4 \text{ et } P(X = 3) = 0,2.$$

$$E(X) = 0 \times 0,4 + 1 \times 0,4 + 3 \times 0,2 = 0,4 + 0,6.$$

$$E(X) = 1.$$

Barème : 0,5 point pour la loi de X ; 0,5 point pour le calcul de $E(X)$.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1 point)

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,4 + 1^2 \times 0,4 + 3^2 \times 0,2 = 0,4 + 1,8 = 2,2.$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2,2 - 1^2 = 1,2.$$

$$V(X) = 1,2 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{1,2} \approx 1,10.$$

Barème : 0,5 point pour $E(X^2)$ et la variance avec la formule ; 0,5 point pour l'écart-type.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (1,5 points)

Par propriété de la transformation affine : $E(Y) = 3E(X) - 2 = 3 \times 1 - 2 = 1$.

$V(Y) = 3^2 V(X) = 9 \times 1,2 = 10,8$ (la constante -2 n'intervient pas dans la variance).

$E(Y) = 1$ et $V(Y) = 10,8$: en moyenne, le joueur gagne 1 euro par partie, le jeu lui est favorable.

Barème : 0,5 point pour $E(Y)$; 0,5 point pour $V(Y)$ avec le facteur 3^2 ; 0,5 point pour la conclusion.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (1,5 points)

Les tirages se font avec remise : l'urne est la même à chaque tirage, donc le résultat du second tirage ne dépend pas du premier. Les variables X_1 et X_2 sont **indépendantes** et suivent la même loi que X .

Par linéarité de l'espérance : $E(S) = E(X_1) + E(X_2) = 1 + 1 = 2$.

Par indépendance, les variances s'additionnent : $V(S) = V(X_1) + V(X_2) = 1,2 + 1,2 = 2,4$.

$E(S) = 2$ et $V(S) = 2,4$.

Barème : 0,5 point pour la justification de l'indépendance ; 0,5 point pour $E(S)$; 0,5 point pour $V(S)$ en citant l'indépendance.

Correction de l'exercice 1, question 5

Question 5 (1 point)

$$E(T) = 2E(X) = 2 \text{ et } V(T) = 2^2 V(X) = 4 \times 1,2 = 4,8.$$

Les espérances sont égales ($E(S) = E(T) = 2$), mais $V(T) = 4,8 > V(S) = 2,4$.

Pour S , les deux tirages sont indépendants : un bon et un mauvais tirage peuvent se compenser, d'où une variance plus faible. Pour $T = X + X$, les deux termes sont identiques (totalement dépendants) : aucune compensation, et la variance n'est pas la somme $V(X) + V(X)$.

Barème : 0,5 point pour $E(T)$ et $V(T)$; 0,5 point pour l'explication par l'indépendance.

Exercice 2 (7 points) : Contrôle qualité et loi binomiale

Une machine produit des pièces. Chaque pièce est défectueuse avec la probabilité $p = 0,1$, indépendamment des autres. On prélève un lot de 200 pièces et on note X le nombre de pièces défectueuses dans ce lot.

Pour la question 4, on dispose de la fonction Python suivante, dont les bornes de la boucle sont à compléter :

```
from math import comb

def proba():
    s = 0
    for k in range(....., .....):
        s = s + comb(200, k) * 0.1**k * 0.9**(200 - k)
    return s
```

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. (1 point)
2. Dans cette question, n est un entier naturel non nul et $p \in]0; 1[$. Soit X une variable de loi $\mathcal{B}(n; p)$. Démontrer que $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$. En déduire $E(X)$ et $V(X)$ pour le lot de 200 pièces. (2,5 points)
3. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis l'utiliser pour minorer la probabilité que le lot contienne strictement plus de 10 et strictement moins de 30 pièces défectueuses. (1,5 points)
4. On souhaite calculer la valeur exacte de $P(10 < X < 30)$ à l'aide de la fonction Python ci-dessus. Recopier la ligne `for` en complétant les bornes de `range`. L'exécution de `proba()` renvoie environ 0,976 : comparer avec la minoration obtenue à la question 3 et commenter. (2 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (1 point)

On répète 200 fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli dont le succès « la pièce est défectueuse » a pour probabilité 0,1.

X compte les succès : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(200; 0,1)$.

Barème : 0,5 point pour la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes ; 0,5 point pour les paramètres $n = 200$ et $p = 0,1$.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (2,5 points)

On écrit $X = X_1 + \dots + X_n$ où les X_i sont des variables de Bernoulli de paramètre p , indépendantes.

Pour chaque i : $E(X_i) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$. Comme $X_i^2 = X_i$, $E(X_i^2) = p$ et $V(X_i) = p - p^2 = p(1 - p)$.

Par linéarité de l'espérance : $E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np$.

Les X_i étant indépendantes, les variances s'additionnent : $V(X) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = np(1 - p)$.

Pour le lot : $E(X) = 200 \times 0,1 = 20$ et $V(X) = 200 \times 0,1 \times 0,9 = 18$.

Barème : 0,5 point pour l'écriture de X comme somme de variables de Bernoulli indépendantes ; 0,5 point pour $E(X_i)$ et $V(X_i)$; 0,5 point pour $E(X) = np$ (linéarité) ; 0,5 point pour $V(X) = np(1 - p)$ en citant l'indépendance ; 0,5 point pour les valeurs numériques 20 et 18.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (1,5 points)

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : si X a pour espérance μ et pour variance $V(X)$, alors pour tout réel $\delta > 0$, $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$.

Ici $\mu = 20$, $V(X) = 18$ et $\delta = 10$: $P(|X - 20| \geq 10) \leq \frac{18}{100} = 0,18$.

L'événement $10 < X < 30$ est $|X - 20| < 10$, contraire de $|X - 20| \geq 10$. Donc $P(10 < X < 30) \geq 1 - 0,18$.

$P(10 < X < 30) \geq 0,82$.

Barème : 0,5 point pour l'énoncé de l'inégalité ; 0,5 point pour le choix de $\delta = 10$ et la majoration 0,18 ; 0,5 point pour le passage à l'événement contraire et le résultat.

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (2 points)

Comme X est entière, $10 < X < 30$ équivaut à $X \in \{11, \dots, 29\}$. La fonction `range(a, b)` parcourt les entiers de a à $b - 1$:

```
from math import comb

def proba():
    s = 0
    for k in range(11, 30):
        s = s + comb(200, k) * 0.1**k * 0.9**(200 - k)
    return s
```

Les bornes sont `range(11, 30)`.

La minoration donnait $0,82$ et la valeur exacte est environ $0,976 \geq 0,82$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est cohérente avec la valeur exacte mais **grossière** : elle ne fait intervenir que l'espérance et la variance, et fournit seulement un minorant valable pour toute loi.

Barème : 0,5 point pour la borne inférieure 11 ; 0,5 point pour la borne supérieure 30 (exclue par range) ; 0,5 point pour la comparaison $0,82 \leq 0,976$; 0,5 point pour le commentaire sur la précision de la minoration.

Exercice 3 (7 points) : Sondage et loi des grands nombres

Dans une ville, une proportion inconnue p des habitants est favorable à un projet. On interroge au hasard, avec remise, n habitants et on note F_n la fréquence des personnes favorables dans l'échantillon. On admet que nF_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

- Donner l'espérance et la variance de F_n . Montrer que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ puis que, pour tout réel $\delta > 0$, $P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$. (2 points)
- On interroge $n = 1\,000$ habitants. Montrer que la probabilité que F_n soit à moins de $0,05$ de p est supérieure ou égale à $0,9$. (1 point)
- Déterminer le plus petit entier n pour lequel l'inégalité de la question 1 garantit, quelle que soit la valeur de p , que $P(|F_n - p| < 0,02) \geq 0,95$. (1,5 points)
- Un institut interroge $n = 2\,500$ habitants et observe $F_n = 0,55$. Si la population était partagée à parts égales ($p = 0,5$), majorer la probabilité d'un écart d'au moins $0,05$ entre F_n et $0,5$. Peut-on douter de l'hypothèse $p = 0,5$ au seuil de 5% ? (1,5 points)
- Déduire de l'inégalité de la question 1 que, pour tout $\delta > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|F_n - p| \geq \delta) = 0$. Interpréter ce résultat. (1 point)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (2 points)

Comme $F_n = \frac{nF_n}{n}$ avec $nF_n \sim \mathcal{B}(n; p) : E(F_n) = \frac{np}{n} = p$ et $V(F_n) = \frac{1}{n^2} np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$.

On a $\frac{1}{4} - p(1-p) = p^2 - p + \frac{1}{4} = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, donc $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à F_n donne : $P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \frac{V(F_n)}{\delta^2} = \frac{p(1-p)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$.

Barème : 0,5 point pour $E(F_n) = p$; 0,5 point pour $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}$; 0,5 point pour $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$; 0,5 point pour l'application de Bienaymé-Tchebychev et la conclusion.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (1 point)

Avec $\delta = 0,05$ et $n = 1\,000$: $P(|F_n - p| \geq 0,05) \leq \frac{1}{4 \times 1\,000 \times 0,05^2} = \frac{1}{10} = 0,1$.

Par événement contraire, $P(|F_n - p| < 0,05) \geq 1 - 0,1 = 0,9$.

Barème : 0,5 point pour la majoration par 0,1 ; 0,5 point pour l'événement contraire.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (1,5 points)

D'après la question 1 avec $\delta = 0,02$: $P(|F_n - p| \geq 0,02) \leq \frac{1}{4n \times 0,0004} = \frac{625}{n}$.

Il suffit que $\frac{625}{n} \leq 0,05$, c'est-à-dire $n \geq \frac{625}{0,05} = 12\,500$.

Avec $n = 12\,500$ (et plus généralement tout $n \geq 12\,500$), on est assuré que $P(|F_n - p| < 0,02) \geq 0,95$; c'est le plus petit entier que cette inégalité permet de garantir.

Barème : 0,5 point pour la majoration $\frac{625}{n}$; 0,5 point pour l'inéquation $\frac{625}{n} \leq 0,05$; 0,5 point pour la valeur 12 500.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (1,5 points)

Si $p = 0,5$, $E(F_n) = 0,5$ et $V(F_n) = \frac{0,25}{2\,500}$. Avec $\delta = 0,05$:

$$P(|F_n - 0,5| \geq 0,05) \leq \frac{0,25}{2\,500 \times 0,05^2} = \frac{0,25}{6,25} = 0,04.$$

L'écart observé est exactement $0,55 - 0,5 = 0,05$ et un tel écart a une probabilité d'au plus $4\% < 5\%$ si $p = 0,5$: il est raisonnable de douter de l'hypothèse $p = 0,5$ (sans certitude).

Barème : 0,5 point pour l'espérance et la variance sous l'hypothèse $p = 0,5$; 0,5 point pour la majoration 0,04 ; 0,5 point pour la conclusion nuancée.

Correction de l'exercice 3, question 5

Question 5 (1 point)

Pour tout $n \geq 1$: $0 \leq P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n\delta^2} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|F_n - p| \geq \delta) = 0$.

C'est la loi (faible) des grands nombres : quand l'échantillon grossit, la probabilité que la fréquence s'écarte de p d'au moins δ tend vers 0.

Barème : 0,5 point pour l'encadrement et le théorème des gendarmes ; 0,5 point pour l'interprétation.

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	6
Exercice 2	7
Exercice 3	7
Total	20