

Succession d'épreuves et loi binomiale : le cours

Les probabilités du bac se résument à une phrase : **reconnaître le modèle**.

Un arbre de probabilités ?

Une formule des probabilités totales ?

Une loi binomiale ?

Une fois le modèle reconnu et justifié, les calculs sont courts.

Ce chapitre rassemble les trois outils :

- les **probabilités conditionnelles** et les arbres pondérés ;
- l'**indépendance** et les successions d'épreuves ;
- la **loi binomiale**, pour compter des succès dans une répétition.

Dans tout le cours, tu verras des astuces , des pièges et un peu d'humour .

Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Devant un énoncé, pose-toi toujours **trois questions** : « Y a-t-il un arbre ? » « Les épreuves sont-elles indépendantes ? » « Compte-t-on un nombre de succès ? »
- **Justifie le modèle par écrit** : c'est ce qui rapporte les points, pas seulement le calcul.

1. Probabilités conditionnelles

Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. La **probabilité de B sachant A** est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On en déduit la **formule des probabilités composées** :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Arbre pondéré. Sur un arbre :

- la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 ;
- la probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités de ses branches ;
- $P_A(B)$ se lit sur la branche qui va de A à B .

Pièges :

- Confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$: ce sont deux probabilités **différentes**.
- Écrire $P(A \cap B) = P_A(B)$ (il manque le facteur $P(A)$).
- Oublier que $P_A(B)$ et $P_A(\overline{B})$ sont **complémentaires** : leur somme vaut 1.

2. Formule des probabilités totales

Une **partition** de l'univers Ω est une famille d'événements $A_1, \dots, A_n$ de probabilité non nulle, **deux à deux incompatibles**, dont la **réunion** est Ω . Par exemple $(A, \bar{A})$ est une partition.

Formule des probabilités totales. Pour tout événement B :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

Sur l'arbre : $P(B)$ est la **somme des probabilités des chemins** qui aboutissent à B .

Retrouver une « cause ». Une fois $P(B)$ calculée, on inverse le conditionnement :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) P_A(B)}{P(B)}$$

Astuce. Dans un problème de dépistage, de contrôle qualité ou de machines, la question « sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que... » est toujours $P_B(A)$: **numérateur = un chemin de l'arbre, dénominateur = tous les chemins qui mènent à B .**

3. Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont **indépendants** si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Si $P(A) \neq 0$, cela équivaut à $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B .

Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ le sont aussi (et $\bar{A}$ et B , et $\bar{A}$ et $\bar{B}$).

Ne pas confondre :

- **indépendants** : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$;
- **incompatibles** : $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

Deux événements de probabilité non nulle **ne peuvent pas** être à la fois incompatibles et indépendants.

Deux événements incompatibles, c'est deux personnes qui ne peuvent pas être invitées à la même soirée. Deux événements indépendants, c'est deux personnes qui ne se parlent pas au téléphone : l'un n'influence pas l'autre.

4. Succession d'épreuves indépendantes

On répète des épreuves, l'univers est $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$. Les épreuves sont **indépendantes** si la probabilité d'un résultat $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ est le produit des probabilités :

$$P(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = P_1(\omega_1) \times P_2(\omega_2) \times \dots \times P_n(\omega_n)$$

Dans un arbre, cela revient à multiplier les probabilités le long d'un chemin, avec **les mêmes probabilités** à chaque niveau si l'épreuve est répétée à l'identique.

5. Épreuve et schéma de Bernoulli

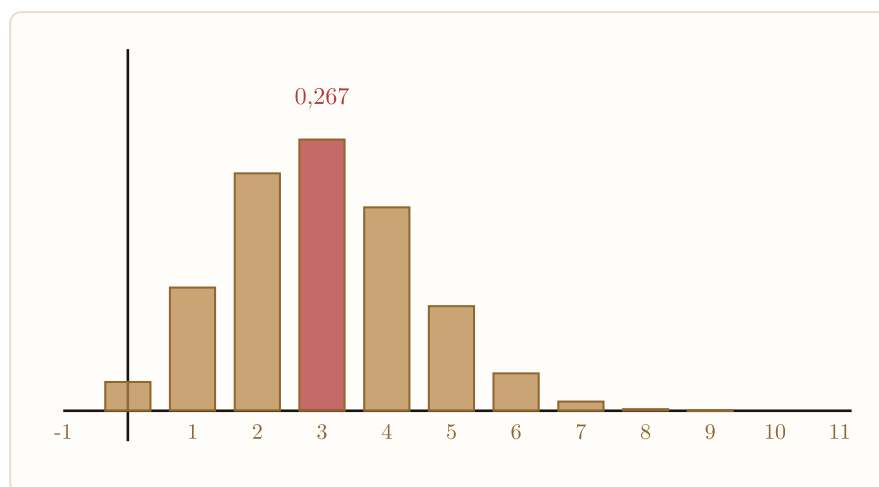
Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p ($0 \leq p \leq 1$) est une expérience à **deux issues** : le **succès** S (de probabilité p) et l'**échec** $\bar{S}$ (de probabilité $1 - p$).

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**. Une issue est une liste de n lettres S ou $\bar{S}$.

$$P(\text{une liste précise avec } k \text{ succès}) = p^k (1 - p)^{n-k}$$

6. La loi binomiale

Soit X le **nombre de succès** dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . On dit que X suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$.



Loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,3)$: $P(X = k)$ pour k de 0 à 10 (hauteur $\times 10$), maximum en $k = 3$

Théorème. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Pourquoi ? Il y a $\binom{n}{k}$ chemins de l'arbre à k succès (on choisit les k places des succès parmi les n épreuves). Chacun a pour probabilité $p^k (1 - p)^{n-k}$.

Propriétés :

- $\sum_{k=0}^n P(X = k) = (p + (1 - p))^n = 1$ (formule du binôme).
- **Espérance** : $E(X) = np$.
- **Variance** : $V(X) = np(1 - p)$, et **écart-type** $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

(Ces deux formules seront démontrées au chapitre suivant, avec les sommes de variables aléatoires.)

Rédiger une loi binomiale. Écris toujours les quatre éléments :

« On répète $n = \dots$ fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \dots$ (succès : « ... »).

Soit X le nombre de succès.

Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. »

7. Calculer avec la loi binomiale

Calculatrice. La fonction de **densité** donne $P(X = k)$; la fonction de **répartition** donne $P(X \leq k)$.

Événements usuels :

- $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$;
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$;
- **au moins un succès** : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$.

Seuil. Pour trouver le plus petit n tel que $P(X \geq 1) \geq a$:

$$1 - (1 - p)^n \geq a \iff (1 - p)^n \leq 1 - a \iff n \ln(1 - p) \leq \ln(1 - a) \iff n \geq \frac{\ln(1 - a)}{\ln(1 - p)}$$

Le dernier signe change de sens car $\ln(1 - p) < 0$.

Pièges :

- Une loi binomiale exige des épreuves **indépendantes** et de **même probabilité** : un tirage **sans remise** dans une petite urne ne convient pas.
- $P(X > k)$ n'est pas $P(X \geq k)$: attention à l'inégalité **stricte**.
- Pour un seuil, **divise par un nombre négatif** en renversant l'inégalité.

8. Python

```
from math import comb

def binomiale(n, p, k):
    return comb(n, k) * p**k * (1 - p)**(n - k)

def repartition(n, p, k):
    return sum(binomiale(n, p, i) for i in range(k + 1))

def seuil(p, a):
    n = 1
    while 1 - (1 - p)**n < a:
        n = n + 1
    return n
```

`binomiale(5, 0.4, 2)` renvoie 0.3456. `seuil(0.05, 0.9)` renvoie 45.

9. Les 10 pépites du chapitre

1. **Arbre** : somme = 1 sur chaque nœud, **produit** le long d'un chemin, **somme** des chemins pour $P(B)$.
2. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$: ne l'inverse pas avec $P_B(A)$.
3. **Probabilités totales** : partition, puis somme des chemins.
4. **Indépendance** : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Indépendants $\neq$ incompatibles.
5. **Schéma de Bernoulli** : identiques **et** indépendantes.
6. **Justifie** toujours « X suit $\mathcal{B}(n, p)$ » avec n , p et le succès.
7. $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.
8. **Au moins un** : $1 - (1 - p)^n$.
9. $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$.
10. **Seuil** : passe aux logarithmes, renverse l'inégalité.

Complément du programme : simuler une loi binomiale avec Python

On simule une épreuve de Bernoulli de paramètre p avec `random() < p`, puis un schéma de Bernoulli en répétant n fois et en comptant les succès.

```

from random import random

def binomiale(n, p):
    succes = 0
    for _ in range(n):
        if random() < p:
            succes = succes + 1
    return succes

N = 100000
compte = 0
for _ in range(N):
    if binomiale(10, 0.3) == 3:
        compte = compte + 1
print(compte / N)    # proche de 0.2668

```

La valeur théorique est $P(X = 3) = \binom{10}{3} 0,3^3 0,7^7 = 120 \times 0,027 \times 0,0823543 \approx 0,2668$ pour $X \sim \mathcal{B}(10; 0,3)$.

Astuce. Plus le nombre de simulations N est grand, plus la fréquence observée se rapproche de la probabilité : c'est la **loi des grands nombres**, vue au chapitre 13.

10. Ce qui peut tomber au bac

- Des **arbres**, des probabilités conditionnelles, la **formule des probabilités totales**, l'indépendance (fiche 1).
- Des **successions d'épreuves** et des schémas de Bernoulli (fiche 2).
- La **loi binomiale** : probabilités, espérance, variance (fiche 3).
- Des **problèmes** de seuil, de simulation et de modèles mêlés, avec Python (fiche 4 et exercices type bac).

Tu as maintenant le cours. Passe aux quatre fiches, aux exercices type bac, puis au Guide de rédaction du chapitre.