

Succession d'épreuves et loi binomiale : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac :

- deux machines, un arbre, puis un échantillon de pièces (loi binomiale, seuil, Python) ;
- un joueur de basket : loi binomiale, espérance, écart-type, seuil ;
- deux urnes choisies au hasard, puis des tirages avec remise : arbre et loi binomiale mêlés.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac :

- événements définis, données traduites en probabilités ;
- formules citées (probabilités totales, conditionnelle, loi binomiale) ;
- modèle binomial **justifié** avec n , p et le succès ;
- seuils traités avec les logarithmes ;
- conclusion en contexte.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Commence par **définir les événements** et **traduire l'énoncé** en probabilités.
- Écris **toujours** « X suit $\mathcal{B}(n, p)$ » avec sa justification.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : deux machines et un échantillon

Une usine fabrique des pièces avec deux machines A et B .

La machine A produit 60 % des pièces, la machine B les 40 % restantes.

Une pièce produite par A est défectueuse avec la probabilité 0,03, une pièce produite par B avec la probabilité 0,05.

Partie A. On prélève une pièce au hasard. On note D l'événement « la pièce est défectueuse ».

1. Construire un arbre pondéré.
2. Montrer que $P(D) = 0,038$.
3. La pièce est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de la machine A ?

Partie B. On prélève 20 pièces au hasard.

La production est assez grande pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

Soit X le nombre de pièces défectueuses.

4. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
5. Calculer la probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse, puis qu'il y en ait au moins deux.
6. Calculer l'espérance et l'écart-type de X .
7. Quel est le plus petit nombre n de pièces à prélever pour que la probabilité d'obtenir au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à 0,95 ? Écrire un script Python qui le confirme.

Correction de la question 1

On note A : « la pièce vient de la machine A » et B : « la pièce vient de B ». Les données : $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$, $P_A(D) = 0,03$, $P_B(D) = 0,05$.

L'arbre pondéré :

- A (0,6)
 - D (0,03)
 - $\overline{D}$ (0,97)
- B (0,4)
 - D (0,05)
 - $\overline{D}$ (0,95)

Correction de la question 2

(A, B) est une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A) P_A(D) + P(B) P_B(D) = 0,6 \times 0,03 + 0,4 \times 0,05 = 0,018 + 0,020$$

$$P(D) = 0,038$$

Correction de la question 3

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,018}{0,038}$$

$$P_D(A) = \frac{9}{19} \approx 0,474$$

Correction de la question 4

Le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise : on répète **20 fois**, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli de succès « la pièce est défectueuse », de probabilité $p = P(D) = 0,038$.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,038)$.

Correction de la question 5

$$P(X = 0) = 0,962^{20}$$

$$P(X = 0) \approx 0,461$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \text{ avec } P(X = 1) = 20 \times 0,038 \times 0,962^{19} \approx 0,3640.$$

$$P(X \geq 2) \approx 1 - 0,4608 - 0,3640 = 0,175$$

Correction de la question 6

$$E(X) = np = 20 \times 0,038$$

$$E(X) = 0,76$$

$$V(X) = np(1 - p) = 20 \times 0,038 \times 0,962 = 0,73112$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,73112} \approx 0,855$$

Interprétation : sur **20** pièces, on observe en moyenne **0,76** pièce défectueuse.

Correction de la question 7

Soit n le nombre de pièces. La variable X_n suit $\mathcal{B}(n; 0,038)$.

$$P(X_n \geq 1) = 1 - 0,962^n \geq 0,95 \iff 0,962^n \leq 0,05 \iff n \ln 0,962 \leq \ln 0,05$$

Comme $\ln 0,962 < 0$, on divise en renversant l'inégalité :

$$n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,962} \approx 77,3$$

Il faut prélever au moins 78 pièces.

$$\text{Vérification : } 1 - 0,962^{77} \approx 0,9494 < 0,95 \text{ et } 1 - 0,962^{78} \approx 0,9513 \geq 0,95$$

Script :

```
n = 1
while 1 - 0.962**n < 0.95:
    n = n + 1
print(n)
```

Le script affiche **78**.

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1-Q3** : événements définis, arbre complet, probabilités totales avec les deux chemins, $P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$.
- **Q4** : justification en trois éléments : répétition identique et indépendante (tirage avec remise), succès défini, paramètres n et p .
- **Q5-Q6** : formules citées, complémentaire pour « au moins deux », espérance et écart-type avec interprétation.
- **Q7** : inéquation avec **ln**, **inégalité renversée**, seuil arrondi à l'entier supérieur, script cohérent.

Exercice 2 : un joueur de basket

Un joueur réussit chaque lancer franc avec la probabilité **0,6**, indépendamment des autres.

Il effectue **10** lancers.

On note X le nombre de lancers réussis.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il réussisse exactement **6** lancers, puis au moins **6** lancers.
3. Calculer l'espérance et l'écart-type de X .
4. Quel est le plus petit nombre n de lancers pour que la probabilité de réussir au moins un lancer soit supérieure ou égale à **0,999** ?

Correction de la question 1

On répète **10** fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « le lancer est réussi », de probabilité **0,6**.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,6)$.

Correction de la question 2

$$P(X = 6) = \binom{10}{6} \times 0,6^6 \times 0,4^4 = 210 \times 0,046656 \times 0,0256$$

$$P(X = 6) \approx 0,251$$

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5). \text{ Avec la calculatrice, } P(X \leq 5) \approx 0,3669.$$

$$P(X \geq 6) \approx 0,633$$

Correction de la question 3

$$E(X) = 10 \times 0,6$$

$$E(X) = 6$$

$$V(X) = 10 \times 0,6 \times 0,4 = 2,4$$

$$\sigma(X) = \sqrt{2,4} \approx 1,55$$

Correction de la question 4

Soit $X_n \sim \mathcal{B}(n; 0,6)$.

$$P(X_n \geq 1) = 1 - 0,4^n \geq 0,999 \iff 0,4^n \leq 0,001 \iff n \ln 0,4 \leq \ln 0,001$$

Comme $\ln 0,4 < 0$: $n \geq \frac{\ln 0,001}{\ln 0,4} \approx 7,54$.

Il faut au moins $n = 8$ lancers.

Vérification : $1 - 0,4^7 \approx 0,9984 < 0,999$ et $1 - 0,4^8 \approx 0,9993 \geq 0,999$

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : justification complète (identique, indépendant, succès, n , p).
- **Q2** : formule de $P(X = k)$ écrite, complémentaire pour $P(X \geq 6)$.
- **Q3** : $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$, $\sigma = \sqrt{V}$.
- **Q4** : logarithme, inégalité renversée, arrondi à l'entier **supérieur**, vérification avec deux valeurs.

Exercice 3 : deux urnes

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient une proportion **0,25** de boules rouges, l'urne U_2 une proportion **0,75**.

On choisit une urne au hasard (équiprobabilité), puis on tire **4** boules **avec remise** dans l'urne choisie.

On note Y le nombre de boules rouges obtenues.

1. Calculer $P_{U_1}(Y = 3)$ et $P_{U_2}(Y = 3)$.

2. Montrer que $P(Y = 3) = \frac{15}{64}$.

3. On a obtenu exactement trois boules rouges. Quelle est la probabilité que les tirages aient eu lieu dans l'urne U_2 ?

4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge.

Correction de la question 1

Sachant U_1 , on répète 4 fois, de façon identique et indépendante (tirages avec remise), une épreuve de Bernoulli de succès « la boule est rouge », de probabilité **0,25**. Donc Y suit $\mathcal{B}(4; 0,25)$ conditionnellement à U_1 .

$$P_{U_1}(Y = 3) = \binom{4}{3} \times 0,25^3 \times 0,75 = 4 \times 0,015625 \times 0,75$$

$$P_{U_1}(Y = 3) = 0,046875 = \frac{3}{64}$$

De même, sachant U_2 , Y suit $\mathcal{B}(4; 0,75)$:

$$P_{U_2}(Y = 3) = \binom{4}{3} \times 0,75^3 \times 0,25 = 4 \times 0,421875 \times 0,25$$

$$P_{U_2}(Y = 3) = 0,421875 = \frac{27}{64}$$

Correction de la question 2

(U_1, U_2) est une partition de l'univers, avec $P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{64} + \frac{1}{2} \times \frac{27}{64} = \frac{1}{2} \times \frac{30}{64}$$

$$P(Y = 3) = \frac{15}{64}$$

Correction de la question 3

$$P_{(Y=3)}(U_2) = \frac{P(U_2 \cap (Y = 3))}{P(Y = 3)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{27}{64}}{\frac{15}{64}} = \frac{27}{128} \times \frac{64}{15}$$

$$P_{(Y=3)}(U_2) = \frac{9}{10} = 0,9$$

Interprétation : avec trois boules rouges sur quatre, il y a 90 % de chances que l'urne choisie soit U_2 .

Correction de la question 4

L'événement contraire de « au moins une rouge » est $Y = 0$.

$$P_{U_1}(Y = 0) = 0,75^4 = \frac{81}{256} \text{ et } P_{U_2}(Y = 0) = 0,25^4 = \frac{1}{256}.$$

$$P(Y = 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{81}{256} + \frac{1}{256} \right) = \frac{41}{256}$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - \frac{41}{256} = \frac{215}{256} \approx 0,840$$

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : loi binomiale **conditionnelle** justifiée pour chaque urne, avec le paramètre p propre à l'urne.
- **Q2** : partition (U_1, U_2) , formule des probabilités totales.
- **Q3** : $P_{(Y=3)}(U_2)$ avec le chemin de U_2 au numérateur et $P(Y = 3)$ au dénominateur.
- **Q4** : complémentaire, calcul pour chaque urne, probabilités totales.

Les réflexes à retenir

- Un **arbre** se lit avec **produit** le long d'un chemin et **somme** des chemins.
- Une **loi binomiale** se **justifie** : identique, indépendant, succès, n , p .
- Avec un **choix préalable**, la loi binomiale est **conditionnelle** ; on conclut avec les **probabilités totales**.
- Un **seuil** : logarithme, **inégalité renversée**, arrondi à l'**entier supérieur**.
- **Conclus** chaque question en contexte.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les exercices de probabilités des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.