

Guide de rédaction : succession d'épreuves et loi binomiale

Ce guide complète le Guide de rédaction général. Il rassemble, pour le chapitre Succession d'épreuves et loi binomiale, **les quatorze situations qui reviennent au bac** et, pour chacune, la rédaction modèle.

En probabilités, un résultat numérique seul vaut peu. Le correcteur note d'abord **la modélisation** : les événements définis, la formule citée, la loi justifiée.

Le principe du chapitre

En probabilités, un correcteur regarde surtout **cinq choses** :

- les **événements définis** par des lettres, avec les **données de l'énoncé traduites** ;
- la **formule citée** (composées, totales, conditionnelle, loi binomiale) ;
- l'**indépendance justifiée** (tirage avec remise, énoncé, épreuves distinctes) ;
- la **loi binomiale justifiée** avec n , p et le succès ;
- la **conclusion en contexte** avec la valeur exacte ou approchée.

1. Les quatorze situations et leur rédaction modèle

Situation 1 : traduire l'énoncé.

« On note M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».
D'après l'énoncé, $P(M) = 0,02$, $P_M(T) = 0,95$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,90$, donc $P_{\overline{M}}(T) = 0,10$. »

Définis tes événements avant tout calcul. « Sachant que » signale une probabilité conditionnelle.

Situation 2 : probabilités composées.

« D'après la formule des probabilités composées, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$. »

Situation 3 : formule des probabilités totales.

« $(M, \overline{M})$ est une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, $P(T) = P(M)P_M(T) + P(\overline{M})P_{\overline{M}}(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,10 = 0,117$. »

Vérifie que les événements forment **une partition** (incompatibles, réunion égale à Ω) et n'oublie **aucun chemin**.

Situation 4 : inverser le conditionnement.

$$\ll P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,019}{0,117} = \frac{19}{117} \approx 0,162. \gg$$

Numérateur : **un chemin** de l'arbre. Dénominateur : **tous les chemins** qui mènent à l'événement conditionnant.

Situation 5 : tester l'indépendance.

$\ll P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,7 = 0,2$ et $P(A)P(B) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$. Donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$: les événements A et B sont indépendants. $\gg$

Sinon : $\ll P(C \cap D) = 0,05 \neq 0,15 = P(C)P(D)$: les événements ne sont pas indépendants. $\gg$

Situation 6 : justifier l'indépendance de tirages.

$\ll$ Le tirage est **avec remise** : la composition de l'urne est la même à chaque tirage. Les tirages sont donc identiques et indépendants, avec $P(R) = 0,4$ à chaque tirage. $\gg$

Sans remise, les tirages ne sont **pas** indépendants.

Situation 7 : une succession d'épreuves indépendantes.

$\ll$ Les lancers sont indépendants, avec $P(P) = 0,3$ et $P(F) = 0,7$. Donc $P(PPF) = 0,3 \times 0,3 \times 0,7 = 0,063$. Les trois suites contenant deux piles ont la même probabilité, donc $P(\text{exactement deux piles}) = 3 \times 0,063 = 0,189$. $\gg$

Multiplie le long d'un chemin, **compte** les chemins.

Situation 8 : « au moins un ».

$\ll$ L'événement contraire de « au moins une boule rouge » est « aucune boule rouge », de probabilité $0,6^3 = 0,216$. Donc $P(\text{au moins une rouge}) = 1 - 0,216 = 0,784$. $\gg$

Situation 9 : justifier une loi binomiale.

$\ll$ On répète **10 fois**, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,3$ (succès : « la pièce est défectueuse »).

Soit X le nombre de succès.

Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,3)$. $\gg$

Les **quatre éléments** : répétition identique, indépendance, succès défini, paramètres n et p .

Situation 10 : calculer $P(X = k)$.

« Pour tout k entier de 0 à 10, $P(X = k) = \binom{10}{k} 0,3^k 0,7^{10-k}$. Donc $P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^7 \approx 0,267$. »

Situation 11 : $P(X \leq k)$ et $P(X \geq k)$.

« $P(X \leq 2)$ se calcule avec la fonction de répartition de la calculatrice : $\approx 0,383$. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0,617$. »

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$. Écris l'événement contraire.

Situation 12 : espérance, variance, écart-type.

« X suit $\mathcal{B}(20; 0,038)$, donc $E(X) = np = 0,76$, $V(X) = np(1 - p) \approx 0,731$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 0,855$. Interprétation : sur 20 pièces, on observe en moyenne 0,76 pièce défectueuse. »

Situation 13 : un seuil avec les logarithmes.

« $1 - 0,962^n \geq 0,95 \iff 0,962^n \leq 0,05 \iff n \ln 0,962 \leq \ln 0,05$. Comme $\ln 0,962 < 0$, on divise en renversant l'inégalité : $n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,962} \approx 77,3$. Donc $n \geq 78$. »

Renverse l'inégalité et arrondis à l'entier supérieur.

Situation 14 : arbre et loi binomiale mêlés (choix préalable).

« Sachant U_2 , on répète 4 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,75 : Y suit $\mathcal{B}(4; 0,75)$ conditionnellement à U_2 . (U_1, U_2) est une partition : $P(Y = 3) = P(U_1)P_{U_1}(Y = 3) + P(U_2)P_{U_2}(Y = 3) = \frac{15}{64}$. Donc $P_{(Y=3)}(U_2) = \frac{27/128}{15/64} = \frac{9}{10}$. »

La loi binomiale est **conditionnelle** au choix préalable ; on **combine** avec les probabilités totales.

2. Avant / après sur les probabilités

a) Une loi binomiale.

« X suit une loi binomiale, donc $P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^7$. »

« On répète 10 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « la pièce est défectueuse », $p = 0,3$. Donc $X \sim \mathcal{B}(10; 0,3)$ et $P(X = 3) = \binom{10}{3} 0,3^3 0,7^7 \approx 0,267$. »

b) Un seuil.

« $0,95^n \leq 0,1$ donc $n \leq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,95}$, soit $n \leq 44$. »

« $0,95^n \leq 0,1 \iff n \ln 0,95 \leq \ln 0,1 \iff n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,95} \approx 44,9$, car $\ln 0,95 < 0$. Donc $n \geq 45$. »

La première n'a **pas renversé** l'inégalité.

c) Une probabilité conditionnelle.

« $P(T | M) = \frac{P(M)}{P(T)}$. »

« $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$ avec $P(M \cap T) = P(M)P_M(T)$. »

d) L'indépendance.

« Les événements sont incompatibles, donc indépendants. »

« $P(E \cap F) = 0 \neq 0,15 = P(E)P(F)$: les événements E et F ne sont pas indépendants. »

3. Les erreurs de rédaction propres à ce chapitre

- Commencer les calculs **sans avoir défini** les événements.
- **Confondre** $P_A(B)$ et $P_B(A)$, ou oublier le facteur $P(A)$ dans $P(A \cap B)$.
- **Oublier un chemin** de l'arbre dans la formule des probabilités totales.
- **Confondre** indépendants et incompatibles.
- Affirmer « X suit une loi binomiale » **sans justification**.
- Utiliser une loi binomiale pour un tirage **sans remise** ou avec un choix préalable non traité.
- Écrire $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k)$.
- **Ne pas renverser** l'inégalité en divisant par un logarithme négatif, ou arrondir le seuil à l'entier inférieur.

4. La check-list du chapitre

- J'ai **défini les événements** et **traduit les données** de l'énoncé.
- J'ai **cité la formule** utilisée (composées, totales, conditionnelle).
- J'ai vérifié qu'il s'agit bien d'une **partition** et pris **tous les chemins**.
- J'ai **justifié l'indépendance** (avec remise, énoncé).
- Pour une loi binomiale, j'ai écrit **identique, indépendant, succès, n , p** .
- Pour « au moins un » et $P(X \geq k)$, j'ai écrit l'**événement contraire** avec le bon indice.
- Pour un seuil, j'ai **renversé l'inégalité** et arrondi à l'**entier supérieur**.
- Ma **conclusion** est en contexte, avec la valeur exacte ou approchée.

Une probabilité supérieure à 1, ça n'existe pas. Si tu en trouves une, c'est que tu as oublié un « 1– » quelque part, ou que tu joues au loto avec un budget infini.