

Épreuves indépendantes et loi binomiale**Fiche Standard**

Nom : _____

Date : _____

Exercice S1 : Un concours en trois épreuves

Un candidat passe trois épreuves successives : un écrit (E), un oral (O) et un travail pratique (T). Il réussit l'écrit avec la probabilité 0,8, l'oral avec la probabilité 0,7 et le travail pratique avec la probabilité 0,5. Les trois épreuves sont indépendantes. Il est admis s'il réussit au moins deux épreuves. On note X le nombre d'épreuves réussies.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré à trois niveaux.
2. Calculer la probabilité de réussir les trois épreuves, puis celle de n'en réussir aucune.
3. Montrer que $P(X = 2) = 0,47$, puis donner la loi de X .
4. En déduire la probabilité que le candidat soit admis.
5. Le candidat est admis. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi le travail pratique ?
6. La variable X suit-elle une loi binomiale ? On pourra calculer $E(X)$ à l'aide de la loi, puis raisonner par l'absurde.

Exercice S2 : Deux fournisseurs de batteries

Une entreprise reçoit ses batteries de deux fournisseurs. Le fournisseur F_1 livre 55 % des batteries, dont 3 % sont défectueuses. Le fournisseur F_2 livre les autres, dont 6 % sont défectueuses. On prélève une batterie au hasard et on note D l'événement « la batterie est défectueuse ».

Partie A.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Montrer que $P(D) = 0,0435$.
3. La batterie est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de F_2 (valeur exacte sous forme de fraction irréductible, puis valeur arrondie au millièm).

Partie B. On prélève 40 batteries dans la production. La production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à 40 tirages avec remise. On note X le nombre de batteries défectueuses.

4. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
5. Calculer la probabilité qu'aucune batterie ne soit défectueuse (arrondie au millièm).
6. Le lot est rejeté si au moins 3 batteries sont défectueuses. Calculer la probabilité de rejeter le lot (arrondie au millièm).
7. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi au centièm).

Exercice S3 : Déterminer un paramètre

Un jardinier sème 5 graines. Chaque graine germe, indépendamment des autres, avec la même probabilité p , où $0 < p < 1$. On note X le nombre de graines qui germent.

1. Justifier que X suit la loi $\mathcal{B}(5; p)$ et exprimer $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$ en fonction de p .
2. Le jardinier constate qu'obtenir exactement une graine germée et obtenir exactement deux graines germées sont équiprobables. Montrer que cela équivaut à $p = \frac{1}{3}$.
3. On prend $p = \frac{1}{3}$. Donner la loi de X sous forme de fractions de dénominateur 243 et vérifier que la somme vaut 1.
4. Calculer $E(X)$ et donner les valeurs de k les plus probables.

Exercice S4 : Un seuil et un algorithme

Lors d'une campagne téléphonique, chaque appel aboutit à un rendez-vous avec la probabilité 0,1, indépendamment des autres appels. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de rendez-vous obtenus avec n appels et $u_n = P(X_n \geq 1)$.

1. Justifier que X_n suit la loi $\mathcal{B}(n; 0,1)$ et montrer que $u_n = 1 - 0,9^n$.
2. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geq 0,95$. Justifier par un calcul avec le logarithme, puis vérifier avec les valeurs de u_{28} et u_{29} .
3. Même question pour $u_n \geq 0,999$.
4. On considère la fonction suivante, dans laquelle la condition du `while` a été effacée.

```
def seuil(p, a):
    n = 1
    while .....:
        n = n + 1
    return n
```

- a) Recopier et compléter la condition pour que `seuil(p, a)` renvoie le plus petit entier n tel que $1 - (1 - p)^n \geq a$.
- b) Quelles valeurs renvoient `seuil(0.1, 0.95)` et `seuil(0.1, 0.999)` ?
- c) Justifier que la boucle se termine pour $p = 0,1$ et $a = 0,95$.

Exercice S5 : Un jeu de fléchettes

Un stand propose, pour une mise de 3 €, de lancer 5 fléchettes. Chaque fléchette atteint la cible avec la probabilité 0,3, indépendamment des autres. Le joueur reçoit 2 € par fléchette qui atteint la cible. On note X le nombre de fléchettes qui atteignent la cible et G le gain algébrique du joueur, mise comprise.

1. Justifier que X suit la loi $\mathcal{B}(5; 0,3)$. Donner la loi de X (valeurs exactes).
2. Exprimer G en fonction de X . Calculer $E(G)$. Le jeu est-il équitable ?
3. Calculer la probabilité que le joueur réalise un gain algébrique strictement positif.
4. Calculer $V(X)$, puis l'écart type de G (arrondi au centième).

Exercice S6 : Événements liés à un nombre de pièces défectueuses

Dans un lot de 10 pièces, chaque pièce est défectueuse avec la probabilité 0,1, indépendamment des autres. On note X le nombre de pièces défectueuses, A l'événement « $X \geq 1$ » et B l'événement « $X \leq 2$ ».

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. Calculer $P(A)$ et $P(B)$ (arrondis au millièmme).
3. Exprimer $A \cap B$ à l'aide de X et calculer $P(A \cap B)$ (arrondi au millièmme).
4. Calculer $P_B(A)$ et $P_A(B)$ (arrondis au millièmme).
5. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice S7 : Simuler une loi binomiale

On considère le script suivant.

```
from random import random
```

```
def tirage(n, p):
    s = 0
    for i in range(n):
        if random() < p:
            s = s + 1
    return s
```

```
N = 10000
c = 0
for j in range(N):
    if tirage(6, 0.25) >= 2:
        c = c + 1
```

```
print(c / N)
```

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X simulée par `tirage(6, 0.25)` ? Justifier.
2. Quelle probabilité le script permet-il d'estimer ? Calculer sa valeur exacte, arrondie au millième.
3. Deux exécutions du script affichent-elles exactement le même nombre ? Pourquoi ?
4. Modifier le script pour estimer l'espérance de X . Quelle valeur s'attend-on à obtenir ?

Exercice S8 : La valeur la plus probable

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(20; 0,3)$.

1. Montrer que, pour $0 \leq k \leq 19$, $\frac{P(X = k+1)}{P(X = k)} = \frac{20-k}{k+1} \times \frac{3}{7}$. On rappelle que $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$.
2. Montrer que ce quotient est strictement supérieur à 1 si et seulement si $k < 5,3$.
3. En déduire le sens de variation de $k \mapsto P(X = k)$ puis la valeur de k pour laquelle $P(X = k)$ est maximale.
4. Calculer cette probabilité maximale (arrondie au millième) et la comparer à $E(X)$.

Exercice S9 : Une marche aléatoire

Un pion part de l'origine d'un axe gradué. À chaque étape, il avance d'une unité vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{2}$, sinon d'une unité vers la gauche, indépendamment des étapes précédentes. On effectue 6 étapes. On note X le nombre de déplacements vers la droite et Y l'abscisse finale du pion.

1. Donner la loi de X . Exprimer Y en fonction de X .
2. Calculer la probabilité que le pion revienne à l'origine.
3. Calculer la probabilité que le pion termine à droite de l'origine, à une distance au moins égale à 2.
4. Le pion est revenu à l'origine à la fin de la sixième étape. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué ses trois premiers déplacements vers la droite ?
5. Reprendre la question 2 en supposant que le pion avance vers la droite avec la probabilité 0,6 (valeur exacte puis arrondi au millième).

Exercice S10 : Trois tirages successifs sans remise

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires, indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise 3 boules. On note B_i l'événement « la i -ème boule tirée est blanche » et X le nombre de boules blanches obtenues.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré à trois niveaux. Les trois tirages sont-ils indépendants ?
2. Calculer $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$, puis la probabilité d'obtenir exactement deux boules blanches.
3. Calculer $P(B_3)$ en utilisant la formule des probabilités totales avec la partition formée par les quatre issues possibles des deux premiers tirages.
4. Calculer $P_{B_3}(B_1)$.
5. Donner la loi de X . La variable X suit-elle une loi binomiale ? Justifier en comparant $P(X = 3)$ avec la valeur donnée par la loi $\mathcal{B}\left(3; \frac{5}{8}\right)$.

Exercice S11 : Chercher un intervalle de probabilité

On lance 100 fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de piles. On dispose de la fonction suivante, qui renvoie $P(X \leq k)$ pour $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ (elle renvoie 0 si $k < 0$).

```
from math import comb
```

```
def p_inf(n, p, k):
    return sum(comb(n, i) * p**i * (1 - p)**(n - i)
               for i in range(k + 1))
```

1. Justifier que X suit une loi binomiale. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

2. On cherche le plus petit entier k tel que $P(X \geq k) \leq 0,05$. Exprimer $P(X \geq k)$ à l'aide de `p_inf`, puis compléter la condition de la boucle.

```
k = 0
while .....:
    k = k + 1
print(k)
```

Sachant que `p_inf(100, 0.5, 57)  $\approx$  0,9334` et `p_inf(100, 0.5, 58)  $\approx$  0,9557`, que renvoie le script ? Quel intervalle I vérifie $P(X \in I) \leq 0,05$?

3. On cherche maintenant un intervalle $[a; b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$. On pose $a = 40$ et $b = 60$. Sachant que `p_inf(100, 0.5, 39)  $\approx$  0,0176` et `p_inf(100, 0.5, 60)  $\approx$  0,9824`, calculer $P(a \leq X \leq b)$ et conclure.
4. Un joueur annonce avoir obtenu 35 piles. Est-il raisonnable de douter de l'équilibre de la pièce ? Comparer l'intervalle $[40; 60]$ avec $[E(X) - 2\sigma(X); E(X) + 2\sigma(X)]$.