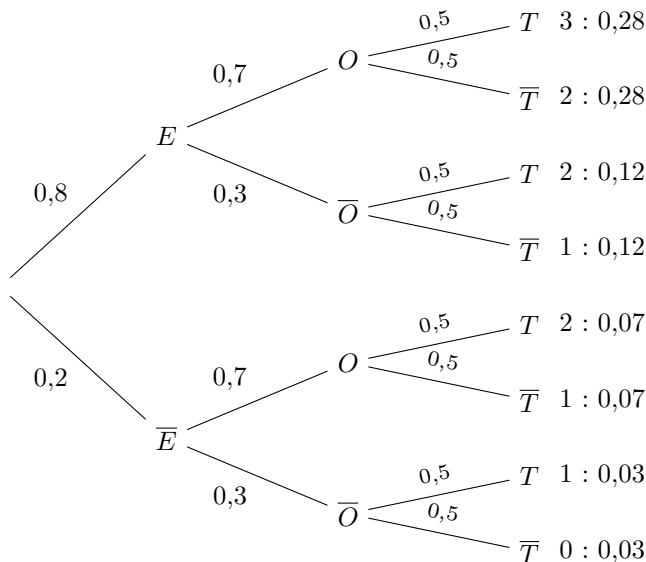


Corrigé : Épreuves indépendantes et loi binomiale

Fiche Standard

S1.

1. Les épreuves étant indépendantes, on garde les mêmes probabilités à chaque niveau. L'arbre (à droite de chaque feuille : le nombre d'épreuves réussies et la probabilité du chemin) :



2. Épreuves indépendantes : $P(E \cap O \cap T) = 0,8 \times 0,7 \times 0,5 = 0,28$ et $P(\bar{E} \cap \bar{O} \cap \bar{T}) = 0,2 \times 0,3 \times 0,5 = 0,03$.
3. « $X = 2$ » est la réunion de trois chemins incompatibles : $E O \bar{T}$, $\bar{E} \bar{O} T$ et $\bar{E} O T$.
 $P(X = 2) = 0,8 \times 0,7 \times 0,5 + 0,8 \times 0,3 \times 0,5 + 0,2 \times 0,7 \times 0,5 = 0,28 + 0,12 + 0,07 = 0,47$.
 De même, $P(X = 1) = 0,8 \times 0,3 \times 0,5 + 0,2 \times 0,7 \times 0,5 + 0,2 \times 0,3 \times 0,5 = 0,12 + 0,07 + 0,03 = 0,22$.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,03	0,22	0,47	0,28

La somme vaut $0,03 + 0,22 + 0,47 + 0,28 = 1$.

4. Admis $\Leftrightarrow X \geq 2$: $P(X \geq 2) = 0,47 + 0,28 = 0,75$.
5. Soit A l'événement « le candidat est admis ». $T \cap A$ est l'événement « T réussi et au moins une des deux autres épreuves réussie » : les chemins $E O T$, $E \bar{O} T$, $\bar{E} O T$, soit $P(T \cap A) = 0,28 + 0,12 + 0,07 = 0,47$. Alors

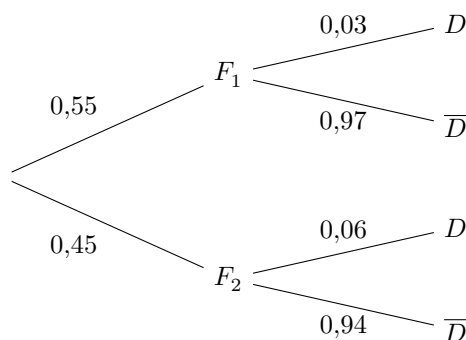
$$P_A(T) = \frac{P(T \cap A)}{P(A)} = \frac{0,47}{0,75} = \frac{47}{75} \approx 0,627.$$

6. D'après la loi, $E(X) = 0 \times 0,03 + 1 \times 0,22 + 2 \times 0,47 + 3 \times 0,28 = 2$. Si X suivait une loi $\mathcal{B}(3; p)$, on aurait $3p = 2$, donc $p = \frac{2}{3}$ et $P(X = 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \approx 0,296 \neq 0,28$. C'est absurde. **Conclusion** : X ne suit pas une loi binomiale, car les trois épreuves n'ont pas la même probabilité de succès.

Conclusion : le candidat est admis avec la probabilité 0,75 ; sachant qu'il est admis, il a réussi le travail pratique avec la probabilité $\frac{47}{75} \approx 0,627$.

S2. Partie A. On note F_1 , F_2 les événements « la batterie vient de F_1 (resp. F_2) ». Les données : $P(F_1) = 0,55$, $P(F_2) = 0,45$, $P_{F_1}(D) = 0,03$, $P_{F_2}(D) = 0,06$.

1. L'arbre pondéré :



2. (F_1, F_2) est une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(F_1)P_{F_1}(D) + P(F_2)P_{F_2}(D) = 0,55 \times 0,03 + 0,45 \times 0,06 = 0,0165 + 0,027 = 0,0435.$$

3. $P_D(F_2) = \frac{P(F_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,027}{0,0435} = \frac{270}{435} = \frac{18}{29} \approx 0,621.$

Partie B.

4. On répète 40 fois, de façon identique et indépendante (tirages avec remise), une épreuve de Bernoulli de succès « la batterie est défectueuse », de probabilité $p = P(D) = 0,0435$. Donc X suit $\mathcal{B}(40; 0,0435)$.
5. $P(X = 0) = 0,9565^{40} \approx 0,169.$
6. $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$ avec $P(X = 1) = 40 \times 0,0435 \times 0,9565^{39} \approx 0,30709$ et $P(X = 2) = \binom{40}{2} \times 0,0435^2 \times 0,9565^{38} \approx 0,27233$. Donc $P(X \geq 3) \approx 1 - 0,16881 - 0,30709 - 0,27233 = 0,25177 \approx 0,252.$
7. $E(X) = 40 \times 0,0435 = 1,74$ et $\sigma(X) = \sqrt{40 \times 0,0435 \times 0,9565} = \sqrt{1,66431} \approx 1,29.$

Conclusion : $P(D) = 0,0435$; une batterie défectueuse vient de F_2 avec la probabilité $\frac{18}{29} \approx 0,621$; un lot de 40 batteries est rejeté avec la probabilité d'environ 0,252.

S3.

1. On répète 5 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « la graine germe », de probabilité p . Donc X suit $\mathcal{B}(5; p)$, avec $P(X = 1) = 5p(1 - p)^4$ et $P(X = 2) = 10p^2(1 - p)^3$.
2. Comme $0 < p < 1$, le nombre $5p(1 - p)^3$ est strictement positif. Alors

$$P(X = 1) = P(X = 2) \iff 5p(1 - p)^4 = 10p^2(1 - p)^3 \iff 1 - p = 2p \iff p = \frac{1}{3}.$$

3. Avec $p = \frac{1}{3}$ et $1 - p = \frac{2}{3}$: $P(X = 0) = \frac{32}{243}$, $P(X = 1) = 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{16}{81} = \frac{80}{243}$, $P(X = 2) = 10 \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{27} = \frac{80}{243}$, $P(X = 3) = 10 \times \frac{1}{27} \times \frac{4}{9} = \frac{40}{243}$, $P(X = 4) = 5 \times \frac{1}{81} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{243}$, $P(X = 5) = \frac{1}{243}$.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

Somme : $\frac{32 + 80 + 80 + 40 + 10 + 1}{243} = \frac{243}{243} = 1.$

4. $E(X) = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \approx 1,67$. Les valeurs les plus probables sont $k = 1$ et $k = 2$ (probabilité $\frac{80}{243} \approx 0,329$ chacune).

Conclusion : les événements « $X = 1$ » et « $X = 2$ » sont équiprobables si et seulement si $p = \frac{1}{3}$.

S4.

1. On répète n fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « l'appel aboutit à un rendez-vous », de probabilité 0,1 : X_n suit $\mathcal{B}(n; 0,1)$. Alors $u_n = 1 - P(X_n = 0) = 1 - 0,9^n$.

2. $u_n \geq 0,95 \iff 0,9^n \leq 0,05 \iff n \ln 0,9 \leq \ln 0,05 \iff n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,9} \approx 28,43$.

Le sens de l'inégalité est renversé car $\ln 0,9 < 0$. Le plus petit entier convenable est $n = 29$.

Vérification : $u_{28} = 1 - 0,9^{28} \approx 0,9477 < 0,95$ et $u_{29} = 1 - 0,9^{29} \approx 0,9529 \geq 0,95$.

3. $u_n \geq 0,999 \iff 0,9^n \leq 0,001 \iff n \geq \frac{\ln 0,001}{\ln 0,9} \approx 65,56$. Le plus petit entier est $n = 66$ (on a $u_{65} \approx 0,99894 < 0,999$ et $u_{66} \approx 0,99904 \geq 0,999$).

4. a) On continue d'incrémenter n tant que le seuil n'est pas atteint, c'est-à-dire tant que $1 - (1-p)^n < a$:

```
def seuil(p, a):
    n = 1
    while 1 - (1 - p)**n < a:
        n = n + 1
    return n
```

b) `seuil(0.1, 0.95)` renvoie 29 et `seuil(0.1, 0.999)` renvoie 66.

c) Comme $0 < 0,9 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc $1 - 0,9^n$ tend vers 1 $> 0,95$. À partir d'un certain rang, $1 - 0,9^n \geq 0,95$: la condition du `while` devient fausse et la boucle s'arrête.

Conclusion : il faut au moins 29 appels pour obtenir un rendez-vous avec une probabilité d'au moins 0,95, et 66 appels pour 0,999.

S5.

1. On répète 5 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « la fléchette atteint la cible », de probabilité 0,3 : X suit $\mathcal{B}(5; 0,3)$.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,16807	0,36015	0,3087	0,1323	0,02835	0,00243

(par exemple $P(X = 2) = 10 \times 0,3^2 \times 0,7^3 = 10 \times 0,09 \times 0,343 = 0,3087$).

2. Le joueur reçoit $2X$ euros et a misé 3 euros : $G = 2X - 3$. Comme $E(X) = 5 \times 0,3 = 1,5$, $E(G) = 2E(X) - 3 = 2 \times 1,5 - 3 = 0$. **Le jeu est équitable :** à long terme, le joueur ne gagne ni ne perd en moyenne.
3. $G > 0 \iff 2X > 3 \iff X \geq 2$. Donc $P(G > 0) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0,16807 - 0,36015 = 0,47178$.
4. $V(X) = 5 \times 0,3 \times 0,7 = 1,05$, donc $\sigma(G) = |2| \sigma(X) = 2\sqrt{1,05} \approx 2,05$.

Conclusion : le jeu est équitable ; le joueur a un gain strictement positif avec la probabilité 0,47178 ; l'écart type de son gain est d'environ 2,05 euros.

S6.

1. On répète 10 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « la pièce est défectueuse », de probabilité 0,1 : X suit $\mathcal{B}(10; 0,1)$.
2. $P(A) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,9^{10} \approx 1 - 0,34868 = 0,65132 \approx 0,651$.
 $P(X = 0) \approx 0,34868$, $P(X = 1) = 10 \times 0,1 \times 0,9^9 \approx 0,38742$ et $P(X = 2) = 45 \times 0,1^2 \times 0,9^8 \approx 0,19371$,
d'où $P(B) = P(X \leq 2) \approx 0,92981 \approx 0,930$.
3. $A \cap B$ est l'événement « $1 \leq X \leq 2$ » : $P(A \cap B) = P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,38742 + 0,19371 = 0,58113 \approx 0,581$.
4. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \approx \frac{0,58113}{0,92981} \approx 0,625$ et $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \approx \frac{0,58113}{0,65132} \approx 0,892$.
5. $P(A) \times P(B) \approx 0,65132 \times 0,92981 \approx 0,606$, alors que $P(A \cap B) \approx 0,581$. Ces deux nombres sont différents.

Conclusion : A et B ne sont pas indépendants (on a aussi $P_B(A) \approx 0,625 \neq P(A) \approx 0,651$).

S7.

1. La fonction répète 6 fois, de façon identique et indépendante, un test « `random() < 0.25` » qui réussit avec la probabilité 0,25, et compte les succès. Donc X suit $\mathcal{B}(6; 0,25)$.
2. Le compteur `c` compte les simulations pour lesquelles $X \geq 2$: `c / N` est la fréquence de l'événement « $X \geq 2$ » sur $N = 10\,000$ simulations, qui estime $P(X \geq 2)$. Valeur exacte :

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0,75^6 - 6 \times 0,25 \times 0,75^5 \\ &\approx 1 - 0,17798 - 0,35596 = 0,46606 \approx 0,466. \end{aligned}$$

3. Non : les nombres tirés par `random()` sont différents à chaque exécution, donc la fréquence affichée varie. Elle reste voisine de 0,466.
4. On additionne les valeurs simulées et on calcule leur moyenne :

```
N = 10000
t = 0
for j in range(N):
    t = t + tirage(6, 0.25)
print(t / N)
```

On s'attend à une valeur proche de $E(X) = 6 \times 0,25 = 1,5$.

S8.

1. Pour $0 \leq k \leq 19$,

$$\frac{P(X = k+1)}{P(X = k)} = \frac{\binom{20}{k+1} 0,3^{k+1} 0,7^{19-k}}{\binom{20}{k} 0,3^k 0,7^{20-k}} = \frac{20-k}{k+1} \times \frac{0,3}{0,7} = \frac{20-k}{k+1} \times \frac{3}{7}.$$

(toutes les probabilités $P(X = k)$ sont strictement positives).

2. Comme $k+1 > 0$: $\frac{3(20-k)}{7(k+1)} > 1 \iff 60-3k > 7k+7 \iff 53 > 10k \iff k < 5,3$.
3. Pour $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$, le quotient est strictement supérieur à 1 : $P(X = 0) < P(X = 1) < \dots < P(X = 6)$. Pour $k \geq 6$ (jusqu'à 19), $k > 5,3$ et le quotient est strictement inférieur à 1 (il ne vaut jamais 1 car 5,3 n'est pas entier) : $P(X = 6) > P(X = 7) > \dots > P(X = 20)$. La suite est croissante jusqu'à $k = 6$ puis décroissante : la valeur la plus probable est $k = 6$.
4. $P(X = 6) = \binom{20}{6} \times 0,3^6 \times 0,7^{14} = 38\,760 \times 0,000729 \times 0,7^{14} \approx 0,192$. Par ailleurs $E(X) = 20 \times 0,3 = 6$: ici la valeur la plus probable est égale à l'espérance.

Conclusion : le mode de $\mathcal{B}(20; 0,3)$ est 6, avec $P(X = 6) \approx 0,192$.

S9.

1. Les 6 étapes sont identiques et indépendantes, avec deux issues (droite avec la probabilité $\frac{1}{2}$, gauche sinon) : X suit $\mathcal{B}(6; \frac{1}{2})$. Le pion fait X pas à droite et $6-X$ pas à gauche : $Y = X - (6-X) = 2X - 6$.
2. $Y = 0 \iff X = 3$: $P(Y = 0) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$.
3. $Y \geq 2 \iff 2X - 6 \geq 2 \iff X \geq 4$: $P(Y \geq 2) = \frac{\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}}{64} = \frac{15 + 6 + 1}{64} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$.
4. Sachant $Y = 0$, le pion a fait exactement 3 pas à droite. S'il a fait ses trois premiers pas à droite, les trois derniers sont à gauche : une seule suite possible (DDDGGG), de probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$. La probabilité cherchée est

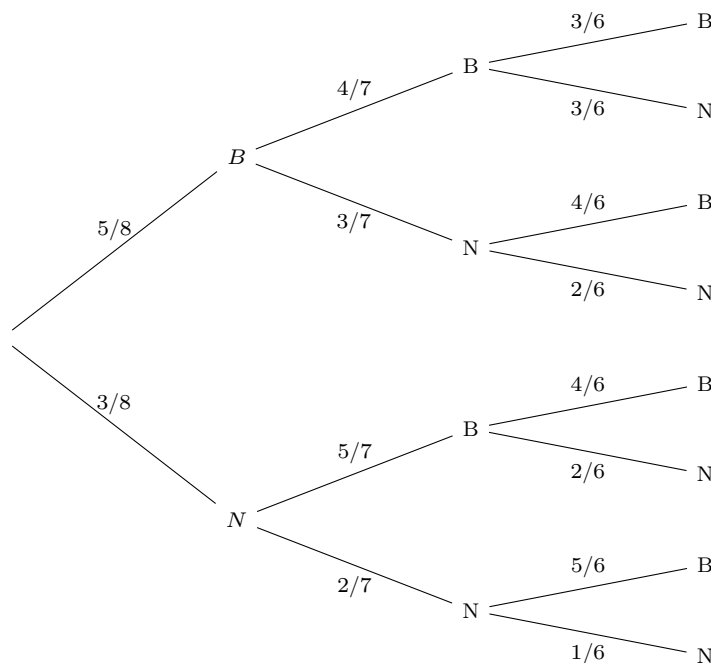
$$\frac{1/64}{20/64} = \frac{1}{20}.$$

5. Avec $p = 0,6$: $P(Y = 0) = P(X = 3) = \binom{6}{3} \times 0,6^3 \times 0,4^3 = 20 \times 0,216 \times 0,064 = 0,27648 \approx 0,276$.

Conclusion : le pion revient à l'origine avec la probabilité $\frac{5}{16}$ (soit 0,3125) dans le cas équilibré, et 0,27648 si $p = 0,6$.

S10.

1. Les probabilités du deuxième et du troisième tirage dépendent des tirages précédents (la composition de l'urne change) : les tirages ne sont pas indépendants.



2. $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{60}{336} = \frac{5}{28}$. Les trois chemins à deux blanches et une noire (BBN, BNB, NBB) ont tous pour probabilité $\frac{5 \times 4 \times 3}{8 \times 7 \times 6} = \frac{5}{28}$ (les facteurs sont les mêmes dans un autre ordre). Ils sont incompatibles : la probabilité d'obtenir exactement deux blanches est $3 \times \frac{5}{28} = \frac{15}{28}$.

3. Les quatre issues des deux premiers tirages $B_1 B_2$, $B_1 N_2$, $N_1 B_2$, $N_1 N_2$ forment une partition :

$$P(B_3) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{60 + 60 + 60 + 30}{336} = \frac{210}{336} = \frac{5}{8}.$$

4. $P(B_1 \cap B_3) = \frac{60}{336} + \frac{60}{336} = \frac{120}{336} = \frac{5}{14}$, donc $P_{B_3}(B_1) = \frac{5/14}{5/8} = \frac{4}{7}$.

5. $P(X = 0) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$, $P(X = 1) = 3 \times \frac{3 \times 2 \times 5}{336} = \frac{15}{56}$, $P(X = 2) = \frac{15}{28} = \frac{30}{56}$, $P(X = 3) = \frac{5}{28} = \frac{10}{56}$. La somme vaut $\frac{1 + 15 + 30 + 10}{56} = 1$. Si X suivait $\mathcal{B}(3; \frac{5}{8})$, on aurait

$$P(X = 3) = \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{125}{512} \approx 0,244, \text{ alors que } P(X = 3) = \frac{5}{28} \approx 0,179.$$

Conclusion : X ne suit pas une loi binomiale : les tirages sans remise ne sont pas indépendants.

S11.

1. Les 100 lancers sont identiques, indépendants, à deux issues (pile avec la probabilité 0,5) : $X \sim \mathcal{B}(100; 0,5)$. $E(X) = 100 \times 0,5 = 50$ et $\sigma(X) = \sqrt{100 \times 0,5 \times 0,5} = 5$.

2. $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1) = 1 - \text{p_inf}(100, 0,5, k-1)$. Condition : $1 - \text{p_inf}(100, 0,5, k-1) > 0,05$. Pour $k = 58$: $P(X \geq 58) = 1 - \text{p_inf}(100, 0,5, 57) \approx 1 - 0,9334 = 0,0666 > 0,05$, la boucle continue ; pour $k = 59$: $P(X \geq 59) = 1 - \text{p_inf}(100, 0,5, 58) \approx 1 - 0,9557 =$

$0,0443 \leq 0,05$, la boucle s'arrête.

Conclusion : le script affiche 59 ; l'intervalle $I = [59 ; 100]$ vérifie $P(X \in I) \approx 0,044 \leq 0,05$.

3. $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq 60) - P(X \leq 39) \approx 0,9824 - 0,0176 = 0,9648$.

Conclusion : $P(40 \leq X \leq 60) \approx 0,965 \geq 0,95$: l'intervalle $[40 ; 60]$ convient.

4. $35 \notin [40 ; 60]$: si la pièce est équilibrée, obtenir un nombre de piles hors de cet intervalle a une probabilité inférieure à 0,05 ($1 - 0,9648 \approx 0,035$). Il est donc raisonnable, avec un risque d'erreur d'environ 5 % au plus, de douter de l'équilibre de la pièce (sans que cela le prouve). Par ailleurs $E(X) - 2\sigma(X) = 40$ et $E(X) + 2\sigma(X) = 60$: l'intervalle $[40 ; 60]$ coïncide avec $[E(X) - 2\sigma(X) ; E(X) + 2\sigma(X)]$.