

Épreuves indépendantes et loi binomiale

Fiche Défi

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Les formules de la loi binomiale : démonstrations

Soit $n \geq 2$ un entier, $p \in]0; 1[$, $q = 1 - p$, et X le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

1. Une issue du schéma est une liste de n lettres S ou $\bar{S}$. Justifier que le nombre d'issues contenant exactement k succès est $\binom{n}{k}$, que chacune a pour probabilité $p^k q^{n-k}$, et en déduire $P(X = k)$.
2. Montrer que $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$.
3. Montrer que, pour $1 \leq k \leq n$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. En déduire que $E(X) = np$.
4. Montrer que, pour $2 \leq k \leq n$, $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$. En déduire $E(X(X-1)) = n(n-1)p^2$, puis $V(X) = np(1-p)$ à l'aide de $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Indication : pour les questions 3 et 4, après changement d'indice, reconnaître la somme des probabilités d'une loi binomiale (question 2 appliquée à $n-1$ puis à $n-2$ épreuves ; pour 0 épreuve, la somme vaut 1).

Exercice D2 : Deux à deux indépendants, mais pas ensemble

On lance deux pièces équilibrées, de façon indépendante. On note A : « la première pièce donne pile », B : « la seconde pièce donne pile » et C : « les deux pièces donnent le même côté ».

1. Donner l'univers, les probabilités des issues, puis $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.
2. Montrer que les événements A et B sont indépendants, puis que A et C le sont, puis que B et C le sont.
3. Calculer $P(A \cap B \cap C)$ et la comparer à $P(A)P(B)P(C)$.
4. Calculer $P_{A \cap B}(C)$. Que peut-on en conclure sur le fait que « C est indépendant de A et de B pris ensemble » ?
5. Dans une succession de trois lancers indépendants d'une pièce équilibrée, on note P_i : « le i -ème lancer donne pile ». Calculer $P(P_1 \cap P_2 \cap P_3)$. Pourquoi la propriété du produit est-elle ici satisfaite ?

Exercice D3 : Problème complet : quiz en ligne

Une plateforme propose un quiz à ses élèves. Parmi eux, 60 % ont suivi le cours en direct (V) et 40 % en replay (R). Un élève qui a suivi le cours en direct réussit le quiz (événement S) avec la probabilité 0,85 ; un élève qui l'a suivi en replay le réussit avec la probabilité 0,7.

Partie A. On choisit un élève au hasard.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Montrer que $P(S) = 0,79$.
3. L'élève a réussi le quiz. Calculer la probabilité qu'il ait suivi le cours en direct (valeur exacte puis arrondi au millièmes).
4. L'élève a échoué au quiz. Calculer la probabilité qu'il ait suivi le cours en replay.

Partie B. On interroge 25 élèves choisis au hasard. Leur nombre est assez petit devant celui des inscrits pour assimiler la situation à des tirages avec remise. On note X le nombre d'élèves qui réussissent le quiz.

5. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
6. Calculer $P(X = 25)$ et $P(X \geq 20)$ (arrondis au millièmes).
7. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi au centièmes). Interpréter $E(X)$.
8. Soit n le nombre d'élèves interrogés. Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité qu'au

moins un élève échoue soit supérieure ou égale à 0,99.

9. Écrire une fonction Python `seuil_echec(q)` qui renvoie ce plus petit entier n pour un seuil q donné, avec la probabilité de réussite 0,79.

Exercice D4 : Au moins deux succès : un seuil qui reste valable

Un laboratoire teste n composants. Chaque composant présente une anomalie avec la probabilité 0,1, de façon indépendante. L'analyse n'est déclenchée que si au moins deux composants présentent une anomalie. On note X_n le nombre de composants anormaux et $u_n = P(X_n \geq 2)$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. On teste $n+1$ composants. Montrer que l'événement « $X_{n+1} \geq 2$ » est la réunion de deux événements incompatibles : « $X_n \geq 2$ » et « $X_n = 1$ et le $(n+1)$ -ème composant est anormal ». En déduire que $u_{n+1} = u_n + 0,1 P(X_n = 1)$ puis que la suite (u_n) est croissante.
3. Écrire un script Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geq 0,9$.
4. Pourquoi la croissance de (u_n) est-elle essentielle pour interpréter le résultat ? Donner la valeur de n trouvée et les valeurs de u_{n-1} et u_n (arrondies au dix-millième).

Exercice D5 : Série au meilleur de $2m - 1$ manches

Deux joueurs A et B disputent une série de manches indépendantes. A gagne chaque manche avec la probabilité $p \in]0; 1[$. Le vainqueur de la série est le premier à gagner m manches. On note $P_m(p)$ la probabilité que A gagne la série.

1. On suppose qu'on joue toujours les $2m - 1$ manches, même quand la série est décidée. Justifier que A gagne la série si et seulement si il gagne au moins m de ces $2m - 1$ manches. En déduire que $P_m(p) = P(Y \geq m)$ où Y suit $\mathcal{B}(2m - 1; p)$.
2. Montrer que $P_2(p) = 3p^2 - 2p^3$, puis que $P_2(p) - p = p(1 - p)(2p - 1)$. Que peut-on dire du meilleur joueur ($p > \frac{1}{2}$) ?
3. Exprimer $P_3(p)$ et calculer $P_3(\frac{1}{2})$. Interpréter.
4. Pour $p = 0,6$, comparer P_1 , P_2 et P_3 .
5. Pour $p = 0,6$, écrire un script Python qui renvoie le plus petit entier m tel que $P_m(0,6) \geq 0,9$, puis donner la valeur de m (on admet que $m \mapsto P_m(0,6)$ est croissante).

Exercice D6 : Parité du nombre de succès

Soit $p \in]0; 1[$, $q = 1 - p$, et, pour $n \geq 0$, X_n une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n; p)$ (avec $X_0 = 0$). On note $a_n = P(X_n \text{ est pair})$.

1. Pour $n \geq 0$, on réalise $n + 1$ épreuves de Bernoulli indépendantes. En distinguant le résultat de la dernière épreuve, montrer que $a_{n+1} = q a_n + p(1 - a_n) = (1 - 2p) a_n + p$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $a_n = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}$.
3. Vérifier cette formule pour $n = 1$ et $n = 2$ par un calcul direct à partir de la loi binomiale.
4. Un dispositif comporte 10 composants, chacun défaillant avec la probabilité 0,1 indépendamment des autres. Calculer la probabilité que le nombre de composants défaillants soit pair (zéro compris).
5. Que devient cette probabilité lorsque $p = \frac{1}{2}$? lorsque n devient grand avec $0 < p < 1$? Interpréter.

Exercice D7 : Le problème du chevalier de Méré

Au XVII^e siècle, le chevalier de Méré interroge Pascal sur deux paris : obtenir au moins un 6 en 4 lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double six en 24 lancers de deux dés. Pascal et Fermat en discutent dans leur correspondance de 1654.

1. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un 6 en 4 lancers d'un dé équilibré (valeur exacte, puis arrondi au millième).
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un double six en 24 lancers de deux dés équilibrés (arrondi au millième). Quel pari est favorable ?

- Déterminer le plus petit nombre de lancers de deux dés pour que la probabilité d'obtenir au moins un double six soit supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$.
- Écrire un script Python qui permet de retrouver ce nombre.

Exercice D8 : Problème de la surréservation

Un vol dispose de 100 places. La compagnie vend n billets ($n \geq 100$). Chaque passager muni d'un billet se présente à l'embarquement avec la probabilité 0,9, indépendamment des autres. On note X_n le nombre de passagers qui se présentent.

- Justifier que X_n suit une loi binomiale. Pour $n = 105$, calculer $E(X_{105})$ et $\sigma(X_{105})$ (arrondi au centième).
- Un passager se voit refuser l'embarquement si $X_n > 100$. On utilise la fonction suivante.

```
from math import comb
```

```
def p_sup(n, p, k):
    return sum(comb(n, i) * p**i * (1 - p)**(n - i)
               for i in range(k + 1, n + 1))
```

Que renvoie `p_sup(n, p, k)` ? Sachant que `p_sup(105, 0.9, 100)  $\approx$  0,0167` et `p_sup(106, 0.9, 100)  $\approx$  0,0398`, que peut-on dire du risque de refus d'embarquement quand on vend 105 ou 106 billets ?

- Pour $n = 105$, la compagnie souhaite connaître le nombre de places k pour lequel le risque $P(X_{105} > k)$ est inférieur ou égal à $\alpha = 0,05$. Compléter la condition de la boucle pour que `plus_petit_k(n, p, alpha)` renvoie le plus petit entier k tel que $P(X > k) \leq \alpha$ pour $X \sim \mathcal{B}(n; p)$, puis donner la valeur renvoyée par `plus_petit_k(105, 0.9, 0.05)`.

```
def plus_petit_k(n, p, alpha):
    k = 0
    while .....:
        k = k + 1
    return k
```

- Chaque billet est vendu 120 euros ; chaque passager refusé reçoit une indemnité de 500 euros (le billet n'est pas remboursé en plus). Le gain de la compagnie est $G_n = 120n - 500 \max(X_n - 100; 0)$. Justifier que

$$E(G_n) = 120n - 500 \sum_{k=101}^n (k - 100) P(X_n = k).$$

- On exécute le script suivant. Il affiche 109 12837.08.

```
def gain_moyen(n):
    return 120*n - 500*sum((k - 100) * comb(n, k) * 0.9**k * 0.1**(n - k)
                          for k in range(101, n + 1))

best = max(range(100, 116), key=gain_moyen)
print(best, round(gain_moyen(best), 2))
```

Interpréter cet affichage. Calculer le gain moyen pour $n = 100$ et comparer. Pourquoi la compagnie peut-elle hésiter à retenir cette valeur de n , sachant que $P(X_{109} > 100) \approx 0,2271$?