

Épreuves indépendantes et loi binomiale

Fiche Bases

Nom : _____

Date : _____

Exercice B1 : Deux tirages avec remise

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules bleues, indiscernables au toucher. On tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, puis on tire une seconde boule. On note R_i l'événement « la i -ème boule tirée est rouge ».

1. Justifier que les deux tirages sont indépendants et que $P(R_i) = 0,6$ pour $i = 1$ et $i = 2$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré. Écrire l'ensemble Ω des issues comme un produit cartésien $\{R; B\} \times \{R; B\}$ et placer les issues sur les chemins de l'arbre.
3. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges, puis deux boules bleues.
4. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une boule rouge.
5. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge.

Exercice B2 : Indépendance et effectifs

Parmi 200 élèves de Terminale d'un lycée, 120 sont des filles et 80 des garçons. Il y a 50 internes, dont 30 filles. On choisit un élève au hasard. On note F l'événement « l'élève est une fille » et I l'événement « l'élève est interne ».

1. Recopier et compléter le tableau des effectifs.

	Interne	Externe	Total
Filles			
Garçons			
Total			200

2. Calculer $P(F)$, $P(I)$ et $P(F \cap I)$.
3. Les événements F et I sont-ils indépendants ?
4. On suppose maintenant que les 50 internes comptent 40 filles (les autres effectifs globaux sont inchangés). Les événements F et I sont-ils alors indépendants ?

Exercice B3 : Reconnaître un schéma de Bernoulli

Dans chaque cas, dire si la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Si oui, donner ses paramètres ; sinon, expliquer pourquoi.

- a) Un basketteur réussit chaque lancer franc avec la probabilité 0,7, indépendamment des autres. Il tire 12 lancers francs. X est le nombre de lancers réussis.
- b) On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. X est le nombre de cœurs obtenus.
- c) On lance 8 fois deux dés équilibrés à six faces. X est le nombre de lancers pour lesquels la somme des deux dés vaut 7.
- d) On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6. X est le nombre de lancers effectués.

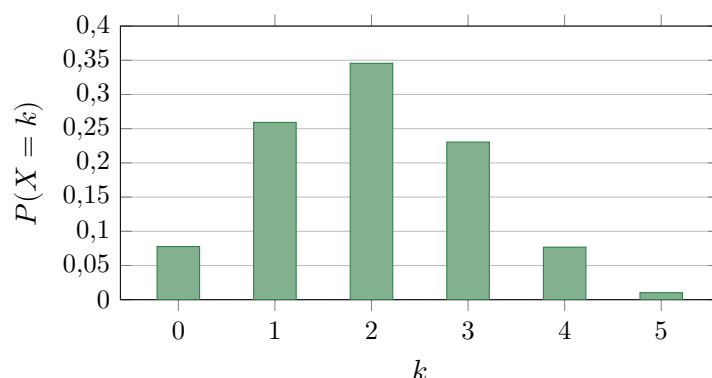
Exercice B4 : Une loi complète

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4; 0,3)$.

1. Calculer $P(X = k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$ et présenter la loi de X dans un tableau.
2. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi au centième).

Exercice B5 : Lecture d'un diagramme en bâtons

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5; 0,4)$. Le diagramme ci-dessous représente la loi de X .



1. Lire sur le diagramme une valeur approchée de $P(X=1)$ et de $P(X=2)$. Quelle est la valeur de k la plus probable ?
2. Calculer la valeur exacte de $P(X=2)$ et comparer avec la lecture.
3. Calculer la valeur exacte de $P(X \geq 3)$.
4. Calculer $E(X)$. Que remarque-t-on par rapport à la valeur de k la plus probable ?

Exercice B6 : Au moins un succès

Un archer atteint sa cible avec la probabilité 0,8 à chaque tir, les tirs étant indépendants. Il effectue 5 tirs. On note X le nombre de tirs qui atteignent la cible.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible à chacun des 5 tirs.
3. Calculer la probabilité qu'il manque la cible à chacun des 5 tirs, puis qu'il l'atteigne au moins une fois.
4. Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible exactement 4 fois, puis au moins 4 fois.

Exercice B7 : Boîtes d'œufs

Dans une boîte de 12 œufs, chaque œuf est cassé avec la probabilité 0,05, indépendamment des autres. On note X le nombre d'œufs cassés dans la boîte.

1. Justifier que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(12; 0,05)$.
2. Calculer $P(X=0)$ et $P(X=1)$ (arrondis au cent-millième, soit cinq décimales).
3. En déduire $P(X \geq 2)$ (arrondi au millième).
4. Calculer $E(X)$ et interpréter ce résultat.

Exercice B8 : Lire un script Python

On considère les fonctions suivantes.

```
from math import comb

def f(n, p, k):
    return comb(n, k) * p**k * (1 - p)**(n - k)

def g(n, p, k):
    s = 0
    for i in range(k + 1):
        s = s + f(n, p, i)
    return s
```

1. Que représente $f(n, p, k)$ lorsque X suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$? Calculer à la main la valeur renvoyée par $f(4, 0.5, 2)$.
2. Que représente $g(n, p, k)$? Calculer à la main la valeur renvoyée par $g(4, 0.5, 1)$.
3. Pour X de loi $\mathcal{B}(10; 0,2)$, écrire une instruction Python qui renvoie $P(X \geq 3)$ en utilisant g .

4. Que renvoie $g(n, p, n)$? Justifier.

Exercice B9 : Vrai ou faux

Justifier chaque réponse.

- a) Deux événements incompatibles, de probabilités non nulles, sont indépendants.
- b) Si X suit la loi $\mathcal{B}(8; 0,5)$, alors $P(X = 3) = P(X = 5)$.
- c) Si X suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$, alors $P(X \geq 1) = 1 - p^n$.
- d) Si X suit la loi $\mathcal{B}(20; 0,1)$, alors $E(X) = 2$.

Exercice B10 : Épreuve de Bernoulli et loi de Bernoulli

- On lance un dé équilibré à six faces et on considère comme succès « obtenir un 6 ». Justifier qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli et donner son paramètre p . Soit X la variable aléatoire égale à 1 en cas de succès et à 0 sinon : donner sa loi, $E(X)$ et $V(X)$.
- Une urne contient 7 boules vertes et 13 boules jaunes. On tire une boule au hasard. Mêmes questions avec le succès « la boule est verte ».
- Soit X une variable de Bernoulli de paramètre p . Montrer que $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$. Pour quelle valeur de p la variance est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ?
- Quelle est la loi de X vue comme loi binomiale ? Préciser les paramètres n et p .

Exercice B11 : Simuler la planche de Galton

Dans une planche de Galton à 4 rangées de clous, une bille rencontre successivement 4 clous. À chaque clou, elle part à droite avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou à gauche avec la probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment des autres clous. Elle tombe ensuite dans la case numérotée par le nombre de fois où elle est partie à droite (cases 0 à 4). On note X ce numéro et on lance 10 000 billes.

- Justifier que X suit la loi $\mathcal{B}\left(4; \frac{1}{2}\right)$ et donner sa loi.
- On considère le script suivant.

```
from random import random

def galton(n):
    case = 0
    for i in range(n):
        if random() < 0.5:
            case = case + 1
    return case

effectifs = [0] * 5
for j in range(10000):
    effectifs[galton(4)] += 1
print(effectifs)
```

- Que représente `effectifs[k]` ? Quelles valeurs approximatives s'attend-on à lire dans la liste affichée ?
 - Deux exécutions du script affichent-elles la même liste ? Pourquoi ?
3. Quelles modifications du script simulent une planche à 6 rangées ? Donner l'effectif attendu de la case 3.