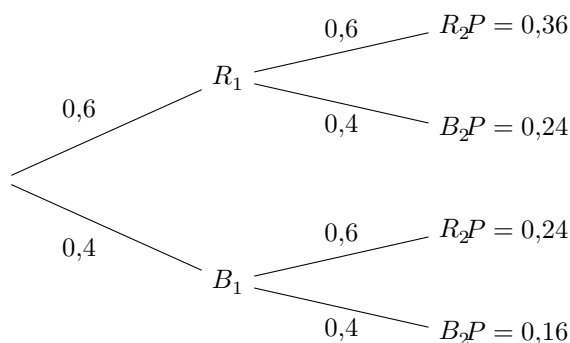


Corrigé : Épreuves indépendantes et loi binomiale

Fiche Bases

B1.

1. La boule est remise dans l'urne après le premier tirage : la composition de l'urne est la même au second tirage. Les deux tirages sont donc identiques et indépendants, et $P(R_i) = \frac{3}{5} = 0,6$ pour $i = 1, 2$.
2. L'arbre pondéré (on note B_i l'événement contraire de R_i , avec $P(B_i) = 0,4$) :



On a $\Omega = \{R; B\} \times \{R; B\} = \{(R; R), (R; B), (B; R), (B; B)\}$, chaque couple correspondant à un chemin de l'arbre.

3. Les tirages étant indépendants, la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches.
 $P(R_1 \cap R_2) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$ et $P(B_1 \cap B_2) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$.
4. « Exactement une rouge » est la réunion des deux chemins incompatibles R_1B_2 et B_1R_2 :
 $P = 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,6 = 0,24 + 0,24 = 0,48$.
5. L'événement contraire de « au moins une rouge » est « deux bleues » : $P = 1 - 0,16 = 0,84$ (on retrouve $0,36 + 0,48 = 0,84$).

Conclusion : $P(\text{deux rouges}) = 0,36$, $P(\text{deux bleues}) = 0,16$, $P(\text{exactement une rouge}) = 0,48$, $P(\text{au moins une rouge}) = 0,84$.

B2.

1. Filles internes : 30 ; filles externes : $120 - 30 = 90$; internes en tout : 50, donc garçons internes : $50 - 30 = 20$; garçons externes : $80 - 20 = 60$; externes en tout : $90 + 60 = 150$.

	Interne	Externe	Total
Filles	30	90	120
Garçons	20	60	80
Total	50	150	200

2. L'élève est choisi au hasard : $P(F) = \frac{120}{200} = 0,6$, $P(I) = \frac{50}{200} = 0,25$ et $P(F \cap I) = \frac{30}{200} = 0,15$.
3. $P(F) \times P(I) = 0,6 \times 0,25 = 0,15 = P(F \cap I)$. **Conclusion :** F et I sont indépendants.
4. Avec 40 filles internes : $P(F \cap I) = \frac{40}{200} = 0,2$, alors que $P(F) \times P(I) = 0,15$. Comme $P(F \cap I) \neq P(F)P(I)$, les événements F et I ne sont plus indépendants (on a $P_I(F) = \frac{40}{50} = 0,8 \neq P(F) = 0,6$).

B3.

- a) On répète 12 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « le lancer franc est réussi », de probabilité 0,7. **Conclusion :** X suit $\mathcal{B}(12; 0,7)$.

- b) Le tirage est simultané : il équivaut à des tirages successifs sans remise. La probabilité d'obtenir un cœur change d'un tirage à l'autre (par exemple, sachant que la première carte est un cœur, la probabilité que la deuxième en soit un est $\frac{7}{31}$, alors que la probabilité de la première est $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$). Les épreuves ne sont pas indépendantes. **Conclusion :** X ne suit pas une loi binomiale.
- c) Il y a 6 couples sur 36 de somme 7 : (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1). Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de succès « la somme vaut 7 », de probabilité $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, répétée 8 fois de façon identique et indépendante. **Conclusion :** X suit $\mathcal{B}\left(8; \frac{1}{6}\right)$.
- d) Le nombre d'épreuves n'est pas fixé à l'avance : X est le rang du premier succès, et non un nombre de succès sur n épreuves. **Conclusion :** X ne suit pas une loi binomiale.

B4.

1. Pour $0 \leq k \leq 4$, $P(X = k) = \binom{4}{k} 0,3^k 0,7^{4-k}$.

- $P(X = 0) = 0,7^4 = 0,2401$;
- $P(X = 1) = 4 \times 0,3 \times 0,7^3 = 4 \times 0,3 \times 0,343 = 0,4116$;
- $P(X = 2) = 6 \times 0,3^2 \times 0,7^2 = 6 \times 0,09 \times 0,49 = 0,2646$;
- $P(X = 3) = 4 \times 0,3^3 \times 0,7 = 4 \times 0,027 \times 0,7 = 0,0756$;
- $P(X = 4) = 0,3^4 = 0,0081$.

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,2401	0,4116	0,2646	0,0756	0,0081

2. $0,2401 + 0,4116 + 0,2646 + 0,0756 + 0,0081 = 1$.

3. $E(X) = np = 4 \times 0,3 = 1,2$; $V(X) = np(1 - p) = 4 \times 0,3 \times 0,7 = 0,84$; $\sigma(X) = \sqrt{0,84} \approx 0,92$.

Conclusion : $E(X) = 1,2$, $V(X) = 0,84$, $\sigma(X) \approx 0,92$.

B5.

1. On lit $P(X = 1) \approx 0,26$ et $P(X = 2) \approx 0,35$. Le bâton le plus haut est celui de $k = 2$: la valeur la plus probable est $k = 2$.
2. $P(X = 2) = \binom{5}{2} 0,4^2 0,6^3 = 10 \times 0,16 \times 0,216 = 0,3456$, ce qui est cohérent avec la lecture (0,35).
3. $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$ avec $P(X = 3) = 10 \times 0,4^3 \times 0,6^2 = 0,2304$, $P(X = 4) = 5 \times 0,4^4 \times 0,6 = 0,0768$ et $P(X = 5) = 0,4^5 = 0,01024$. D'où $P(X \geq 3) = 0,31744$.
4. $E(X) = 5 \times 0,4 = 2$. L'espérance est égale à la valeur la plus probable, ce qui n'est pas toujours le cas.

Conclusion : $P(X = 2) = 0,3456$ et $P(X \geq 3) = 0,31744$.

B6.

1. On répète 5 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « le tir atteint la cible », de probabilité 0,8. Donc X suit $\mathcal{B}(5; 0,8)$.
2. $P(X = 5) = 0,8^5 = 0,32768$.
3. $P(X = 0) = 0,2^5 = 0,00032$. Alors $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,00032 = 0,99968$.
4. $P(X = 4) = \binom{5}{4} 0,8^4 \times 0,2 = 5 \times 0,4096 \times 0,2 = 0,4096$. Puis $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0,4096 + 0,32768 = 0,73728$.

Conclusion : l'archer atteint la cible au moins une fois avec la probabilité 0,99968 et au moins 4 fois avec la probabilité 0,73728.

B7.

1. On répète 12 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « l'œuf est cassé », de probabilité 0,05. Donc X suit $\mathcal{B}(12; 0,05)$.

2. $P(X = 0) = 0,95^{12} \approx 0,54036$ et $P(X = 1) = 12 \times 0,05 \times 0,95^{11} \approx 0,34128$.
3. $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0,54036 - 0,34128 = 0,11836$, soit 0,118 au millième.
4. $E(X) = 12 \times 0,05 = 0,6$. En moyenne, une boîte contient 0,6 œuf cassé : sur un grand nombre de boîtes, on compte environ 6 œufs cassés pour 10 boîtes.

Conclusion : une boîte contient au moins deux œufs cassés avec une probabilité d'environ 0,118.

B8.

1. $f(n, p, k)$ renvoie $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Ici $f(4, 0,5, 2) = \binom{4}{2} \times 0,5^2 \times 0,5^2 = 6 \times 0,0625 = 0,375$.
2. $g(n, p, k)$ renvoie la somme $\sum_{i=0}^k P(X = i) = P(X \leq k)$. Ici $g(4, 0,5, 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,0625 + 0,25 = 0,3125$.
3. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$, d'où l'instruction `1 - g(10, 0,2, 2)`.
4. $g(n, p, n)$ renvoie $P(X \leq n) = 1$, puisque X prend toutes ses valeurs entre 0 et n (au plus l'erreur d'arrondi des nombres flottants).

B9.

- Faux.** Si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cap B) = 0$, alors que $P(A)P(B) > 0$. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.
- Vrai.** $P(X = 3) = \binom{8}{3} 0,5^8 = \frac{56}{256}$ et $P(X = 5) = \binom{8}{5} 0,5^8 = \frac{56}{256}$, car $\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56$.
- Faux.** Le contraire de « au moins un succès » est « aucun succès », de probabilité $(1-p)^n$, donc $P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n$. Contre-exemple : $n = 2$ et $p = 0,3$ donnent $1 - 0,7^2 = 0,51$, alors que $1 - p^n = 0,91$.
- Vrai.** $E(X) = np = 20 \times 0,1 = 2$.

B10.

1. L'expérience a deux issues : succès (le 6) avec la probabilité $p = \frac{1}{6}$ et échec avec la probabilité $\frac{5}{6}$: c'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$. La loi de X est $P(X = 1) = \frac{1}{6}$ et $P(X = 0) = \frac{5}{6}$. Alors $E(X) = 0 \times \frac{5}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ et $V(X) = \frac{5}{6} \times \left(0 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{216} + \frac{25}{216} = \frac{30}{216} = \frac{5}{36}$.
2. Épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{7}{20} = 0,35$. Loi : $P(X = 1) = 0,35$, $P(X = 0) = 0,65$. $E(X) = 0,35$ et $V(X) = 0,65 \times 0,35^2 + 0,35 \times 0,65^2 = 0,35 \times 0,65 \times (0,35 + 0,65) = 0,2275$.
3. $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$. $V(X) = (1-p)p^2 + p(1-p)^2 = p(1-p)(p + (1-p)) = p(1-p)$. Comme $p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2$, la variance est maximale pour $p = \frac{1}{2}$ et vaut alors $\frac{1}{4}$.
4. X compte le nombre de succès dans une seule épreuve de Bernoulli : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(1; p)$. On retrouve $P(X = 1) = \binom{1}{1} p = p$ et $P(X = 0) = \binom{1}{0} (1-p) = 1-p$.

B11.

1. Chaque clou est une épreuve de Bernoulli (succès : partir à droite, probabilité $\frac{1}{2}$) et les 4 clous sont indépendants : X est le nombre de succès de 4 épreuves de Bernoulli indépendantes, donc $X \sim \mathcal{B}(4; \frac{1}{2})$. Pour $k = 0, \dots, 4$: $P(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{\binom{4}{k}}{16}$, soit $\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}$.
2. a) `effectifs[k]` est le nombre de billes sur les 10 000 qui sont tombées dans la case k . On s'attend à des valeurs proches de $10\,000 \times P(X = k)$, c'est-à-dire environ [625, 2500, 3750, 2500, 625].
b) Non : la fonction `random()` produit des nombres pseudo-aléatoires différents à chaque exécution. Les effectifs fluctuent autour des valeurs théoriques, dont ils se rapprochent en moyenne quand

le nombre de billes augmente.

- 3.** Il faut créer une liste de 7 cases (`[0] * 7`) et remplacer l'appel par `galton(6)` dans la boucle.

L'effectif attendu de la case 3 est $10\,000 \times P(X = 3) = 10\,000 \times \frac{20}{64} = 3\,125$.