

Fiche 4 : problèmes classiques avec la loi binomiale

Six exercices de synthèse, les grands classiques du chapitre :

- le seuil « au moins un succès avec une probabilité d'au moins a » ;
- la surréservation (overbooking) ;
- une pièce choisie au hasard : arbre et loi binomiale mêlés ;
- un contrôle de qualité avec règle de décision ;
- un algorithme de seuil en Python ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- modèle justifié avec n , p et le succès ;
- inéquation traitée avec les logarithmes (inégalité renversée) ;
- arbre et loi binomiale articulés par la formule des probabilités totales ;
- conclusion en contexte.

Comment attaquer un problème de loi binomiale

1. **Identifie** le succès, n et p , et **justifie** l'indépendance.
2. **Traduis la question** : « au moins un » $\rightarrow 1 - (1 - p)^n$; « au plus k » $\rightarrow P(X \leq k)$.
3. Pour un **seuil**, écris l'inéquation en n et passe aux **logarithmes** (attention au signe).
4. S'il y a un **choix préalable** (une urne, une pièce), pense **arbre** : la loi binomiale est **conditionnelle** au choix, puis **probabilités totales**.
5. **Conclus en contexte**.

Les pièges classiques

- Oublier de **renverser l'inégalité** en divisant par $\ln(1 - p) < 0$.
- Arrondir le seuil **par défaut** : n est le **plus petit entier** supérieur ou égal.
- Appliquer une loi binomiale **avant** d'avoir tenu compte d'un choix aléatoire préalable.
- Ne pas justifier « chaque passager se présente indépendamment ».

Exercice 1 (★★) : combien de pièces contrôler ?

Une pièce est défectueuse avec la probabilité $0,05$, indépendamment des autres. On contrôle n pièces.

1. Exprimer en fonction de n la probabilité q_n qu'au moins une pièce soit défectueuse.
2. Déterminer le plus petit entier n tel que $q_n \geq 0,9$.

Exercice 2 (★★) : la surréservation

Une compagnie aérienne vend **52** billets pour un vol de **50** places.

Chaque passager se présente à l'embarquement avec la probabilité $0,9$, indépendamment des autres.

Soit X le nombre de passagers qui se présentent.

1. Justifier que X suit une loi binomiale.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un passager ne puisse pas embarquer.
3. Calculer le nombre moyen de passagers qui se présentent.

Exercice 3 (★★★) : la pièce choisie au hasard

On dispose de deux pièces : une pièce équilibrée E , et une pièce truquée T qui donne « pile » avec la probabilité $0,8$.

On choisit une pièce au hasard (avec la même probabilité), puis on la lance **3** fois.

On note A l'événement « on obtient trois piles ».

1. Calculer $P(A)$.
2. On a obtenu trois piles. Quelle est la probabilité que la pièce choisie soit la pièce truquée ?

Exercice 4 (★★) : une règle de décision

Un lot est accepté si, dans un échantillon de **50** pièces prélevées au hasard, il y a **au plus 2** pièces défectueuses. On assimile le prélèvement à **50** épreuves indépendantes.

1. Le taux de pièces défectueuses est $p = 0,04$. Calculer la probabilité que le lot soit accepté.
2. Le taux est $p = 0,10$. Calculer la probabilité que le lot soit accepté.
3. Commenter.

Exercice 5 (★★) : un algorithme de seuil

On considère le script suivant :

```
def seuil(p, a):
    n = 1
    while 1 - (1 - p)**n < a:
        n = n + 1
    return n
```

1. Que calcule `seuil(0.05, 0.9)` ?
2. Combien vaut `seuil(0.02, 0.99)` ? Vérifier avec la méthode des logarithmes.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Pour $X \sim \mathcal{B}(n; 0,05)$, $P(X \geq 1)$ augmente quand n augmente.
2. Si l'on double le nombre d'épreuves, la probabilité d'au moins un succès double.
3. Une pièce choisie au hasard parmi deux pièces différentes, puis lancée n fois : le nombre de piles suit une loi binomiale.

Ce qui peut tomber au bac

- Un **seuil** « au moins un succès » avec les logarithmes (exercices 1 et 5).
- Une **situation de contrôle ou de réservation** (exercices 2 et 4).
- Un **arbre mêlé à une loi binomiale**, avec probabilités totales (exercice 3).
- Un **algorithme** de seuil (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Pièces défectueuses avec la probabilité 0,05. Quel est le plus petit nombre n de pièces pour que $P(\text{au moins une défectueuse}) \geq 0,9$?
 A. 44
 B. 90
 C. 46
 D. 45
2. En résolvant $n \ln 0,95 \leq \ln 0,1$, on divise par $\ln 0,95$:
 A. le sens de l'inégalité est renversé car $\ln 0,95 < 0$

- B. le sens de l'inégalité est conservé
- C. on obtient une égalité
- D. on ne peut pas diviser
3. On choisit une pièce équilibrée ou truquée ($P(\text{pile}) = 0,8$), avec la même probabilité, puis on la lance **3** fois : trois « pile ». Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée ?
- A. 0,512
- B. 0,5
- C. 0,2
- D. $\frac{512}{637} \approx 0,80$
4. Une compagnie vend **52** billets pour **50** places, chaque passager se présentant avec la probabilité **0,9**. Au moins un passager ne peut pas embarquer si le nombre X de passagers présents vérifie :
- A. $X \geq 51$
- B. $X \geq 50$
- C. $X = 52$
- D. $X \leq 50$
5. La fonction `seuil(p, a)` du cours, qui utilise une boucle `while`, renvoie :
- A. le plus grand n tel que $1 - (1 - p)^n \geq a$
- B. le plus petit n tel que $1 - (1 - p)^n \geq a$
- C. toujours 1
- D. la valeur de $1 - (1 - p)^n$
6. Dans l'exercice 1, quel est le plus petit nombre de pièces à contrôler pour que la probabilité d'au moins une défectueuse soit d'au moins **0,9** (avec $p = 0,05$) ?
- A. 44
- B. 20
- C. 90
- D. 45
7. Dans l'exercice 2 (surréservation, **52** billets pour **50** places, $p = 0,9$), quelle est la probabilité qu'au moins un passager ne puisse pas embarquer ?
- A. 1
- B. environ 0,9
- C. environ 0,5
- D. environ 0,0283
8. Dans l'exercice 3 (pièce équilibrée ou truquée choisie au hasard, trois « pile » obtenus), quelle est la probabilité que la pièce soit la truquée ?
- A. 0,3185

B. $\frac{512}{637} \approx 0,804$

C. 0,512

D. 0,5

9. Dans l'exercice 4 (règle de décision, échantillon de 50, au plus 2 défectueuses), pour $p = 0,10$, quelle est la probabilité d'acceptation du lot ?

A. 1

B. environ 0,112

C. environ 0,677

D. environ 0,5

10. Dans l'exercice 5, que renvoie ``seuil(0.02, 0.99)`` ?

A. 228

B. 99

C. 100

D. 45