

Fiche 4 : problèmes classiques avec la loi binomiale

Six exercices de synthèse, les grands classiques du chapitre :

- le seuil « au moins un succès avec une probabilité d'au moins a » ;
- la surréservation (overbooking) ;
- une pièce choisie au hasard : arbre et loi binomiale mêlés ;
- un contrôle de qualité avec règle de décision ;
- un algorithme de seuil en Python ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- modèle justifié avec n , p et le succès ;
- inéquation traitée avec les logarithmes (inégalité renversée) ;
- arbre et loi binomiale articulés par la formule des probabilités totales ;
- conclusion en contexte.

Comment attaquer un problème de loi binomiale

1. **Identifie** le succès, n et p , et **justifie** l'indépendance.
2. **Traduis la question** : « au moins un » $\rightarrow 1 - (1 - p)^n$; « au plus k » $\rightarrow P(X \leq k)$.
3. Pour un **seuil**, écris l'inéquation en n et passe aux **logarithmes** (attention au signe).
4. S'il y a un **choix préalable** (une urne, une pièce), pense **arbre** : la loi binomiale est **conditionnelle** au choix, puis **probabilités totales**.
5. **Conclus en contexte**.

Les pièges classiques

- Oublier de **renverser l'inégalité** en divisant par $\ln(1 - p) < 0$.
- Arrondir le seuil **par défaut** : n est le **plus petit entier** supérieur ou égal.
- Appliquer une loi binomiale **avant** d'avoir tenu compte d'un choix aléatoire préalable.
- Ne pas justifier « chaque passager se présente indépendamment ».

Exercice 1 (★★) : combien de pièces contrôler ?

Une pièce est défectueuse avec la probabilité 0,05, indépendamment des autres. On contrôle n pièces.

1. Exprimer en fonction de n la probabilité q_n qu'au moins une pièce soit défectueuse.
2. Déterminer le plus petit entier n tel que $q_n \geq 0,9$.

Correction de l'exercice 1

Question 1

Soit X le nombre de pièces défectueuses parmi les n : X suit $\mathcal{B}(n; 0,05)$ (épreuves identiques et indépendantes).

$$q_n = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$q_n = 1 - 0,95^n$$

Question 2

$$1 - 0,95^n \geq 0,9 \iff 0,95^n \leq 0,1 \iff n \ln 0,95 \leq \ln 0,1 \iff n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,95}$$

Le sens de l'inégalité est renversé car $\ln 0,95 < 0$.

$$\frac{\ln 0,1}{\ln 0,95} \approx 44,9$$

Il faut contrôler au moins 45 pièces.

$$\text{Vérification : } 1 - 0,95^{44} \approx 0,8953 < 0,9 \text{ et } 1 - 0,95^{45} \approx 0,9006 \geq 0,9$$

Exercice 2 (★★) : la surréservation

Une compagnie aérienne vend 52 billets pour un vol de 50 places.

Chaque passager se présente à l'embarquement avec la probabilité 0,9, indépendamment des autres.

Soit X le nombre de passagers qui se présentent.

1. Justifier que X suit une loi binomiale.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un passager ne puisse pas embarquer.
3. Calculer le nombre moyen de passagers qui se présentent.

Correction de l'exercice 2

Question 1

On répète **52** fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « le passager se présente », de probabilité **0,9**.

X suit $\mathcal{B}(52; 0,9)$.

Question 2

Au moins un passager ne peut pas embarquer si $X \geq 51$.

$$P(X \geq 51) = P(X = 51) + P(X = 52) = 52 \times 0,9^{51} \times 0,1 + 0,9^{52}$$

$$P(X = 51) \approx 0,0241 \text{ et } P(X = 52) \approx 0,0042.$$

$$P(X \geq 51) \approx 0,0283$$

Question 3

$$E(X) = 52 \times 0,9$$

$$E(X) = 46,8$$

Interprétation : en moyenne **46,8** passagers se présentent, et le risque de refuser l'embarquement est d'environ **2,8 %**.

Exercice 3 (★★★) : la pièce choisie au hasard

On dispose de deux pièces : une pièce équilibrée E , et une pièce truquée T qui donne « pile » avec la probabilité **0,8**.

On choisit une pièce au hasard (avec la même probabilité), puis on la lance **3** fois.

On note A l'événement « on obtient trois piles ».

1. Calculer $P(A)$.
2. On a obtenu trois piles. Quelle est la probabilité que la pièce choisie soit la pièce truquée ?

Correction de l'exercice 3

On note T : « la pièce est truquée » et E : « la pièce est équilibrée ». $P(T) = P(E) = \frac{1}{2}$.

Question 1

Sachant T , les trois lancers sont indépendants avec $P(\text{pile}) = 0,8$: $P_T(A) = 0,8^3 = 0,512$.

Sachant E : $P_E(A) = 0,5^3 = 0,125$.

(T, E) est une partition. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = \frac{1}{2} \times 0,512 + \frac{1}{2} \times 0,125 = 0,256 + 0,0625$$

$$P(A) = 0,3185$$

Question 2

$$P_A(T) = \frac{P(T \cap A)}{P(A)} = \frac{0,256}{0,3185}$$

$$P_A(T) = \frac{512}{637} \approx 0,804$$

Interprétation : trois piles de suite rendent la pièce truquée environ quatre fois plus vraisemblable que la pièce équilibrée.

Exercice 4 (★★) : une règle de décision

Un lot est accepté si, dans un échantillon de 50 pièces prélevées au hasard, il y a **au plus 2** pièces défectueuses. On assimile le prélèvement à 50 épreuves indépendantes.

1. Le taux de pièces défectueuses est $p = 0,04$. Calculer la probabilité que le lot soit accepté.
2. Le taux est $p = 0,10$. Calculer la probabilité que le lot soit accepté.
3. Commenter.

Correction de l'exercice 4

Soit X le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon. X suit $\mathcal{B}(50; p)$. Le lot est accepté si $X \leq 2$.

Question 1

Pour $p = 0,04$:

$$P(X = 0) = 0,96^{50} \approx 0,1299$$

$$P(X = 1) = 50 \times 0,04 \times 0,96^{49} \approx 0,2706$$

$$P(X = 2) = 1\,225 \times 0,04^2 \times 0,96^{48} \approx 0,2762$$

$$P(X \leq 2) \approx 0,677$$

Question 2

Pour $p = 0,10$, avec la calculatrice :

$$P(X \leq 2) \approx 0,112$$

Question 3

Un lot à 4 % de défectueuses est accepté dans environ 68 % des cas, un lot à 10 % dans environ 11 % des cas. La règle **discrimine** bien les lots, mais elle refuse aussi environ un lot

sur trois parmi les bons lots (à 4 %).

Exercice 5 (★★) : un algorithme de seuil

On considère le script suivant :

```
def seuil(p, a):
    n = 1
    while 1 - (1 - p)**n < a:
        n = n + 1
    return n
```

1. Que calcule `seuil(0.05, 0.9)` ?
2. Combien vaut `seuil(0.02, 0.99)` ? Vérifier avec la méthode des logarithmes.

Correction de l'exercice 5

Question 1

La boucle `while` augmente n tant que $1 - (1 - p)^n < a$. Elle s'arrête au **premier** entier n tel que $1 - (1 - p)^n \geq a$.

`seuil(0.05, 0.9)` renvoie le plus petit n tel que $P(X \geq 1) \geq 0,9$ pour $X \sim \mathcal{B}(n; 0,05)$, soit 45 (exercice 1).

Question 2

Par la méthode des logarithmes : $n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,98} \approx 227,9$.

Le plus petit entier est 228 : `seuil(0.02, 0.99)` renvoie 228.

Vérification : $1 - 0,98^{227} \approx 0,9898 < 0,99$ et $1 - 0,98^{228} \approx 0,9900 \geq 0,99$

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Pour $X \sim \mathcal{B}(n; 0,05)$, $P(X \geq 1)$ augmente quand n augmente.
2. Si l'on double le nombre d'épreuves, la probabilité d'au moins un succès double.
3. Une pièce choisie au hasard parmi deux pièces différentes, puis lancée n fois : le nombre de piles suit une loi binomiale.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

$P(X \geq 1) = 1 - 0,95^n$ est une fonction croissante de n , car $0,95^n$ décroît.

Vrai.

Affirmation 2

Contre-exemple : pour $p = 0,05$, $n = 45$ donne $0,9006$; $n = 90$ donne $1 - 0,95^{90} \approx 0,990$, pas $1,8$. Une probabilité ne dépasse jamais 1.

Faux.

Affirmation 3

La probabilité de « pile » dépend de la pièce choisie : le nombre de piles suit une loi binomiale **conditionnellement à la pièce**, mais **pas** globalement (la loi globale est un mélange de deux lois binomiales).

Faux.

Ce qui peut tomber au bac

- Un **seuil** « au moins un succès » avec les logarithmes (exercices 1 et 5).
- Une **situation de contrôle ou de réservation** (exercices 2 et 4).
- Un **arbre mêlé à une loi binomiale**, avec probabilités totales (exercice 3).
- Un **algorithme** de seuil (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Pièces défectueuses avec la probabilité $0,05$. Quel est le plus petit nombre n de pièces pour que $P(\text{au moins une défectueuse}) \geq 0,9$?

- A. 44
- B. 90
- C. 46
- D. 45 (bonne réponse)

Justification : $1 - 0,95^n \geq 0,9 \iff n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,95} \approx 44,9$.

2. En résolvant $n \ln 0,95 \leq \ln 0,1$, on divise par $\ln 0,95$:

- A. le sens de l'inégalité est renversé car $\ln 0,95 < 0$ (bonne réponse)

- B. le sens de l'inégalité est conservé
- C. on obtient une égalité
- D. on ne peut pas diviser

Justification : Diviser par un nombre négatif renverse l'inégalité : $n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,95}$.

3. On choisit une pièce équilibrée ou truquée ($P(\text{pile}) = 0,8$), avec la même probabilité, puis on la lance 3 fois : trois « pile ». Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée ?

- A. 0,512
- B. 0,5
- C. 0,2
- D. $\frac{512}{637} \approx 0,80$ (**bonne réponse**)

Justification : $\frac{0,5 \times 0,8^3}{0,5 \times 0,8^3 + 0,5 \times 0,5^3}$.

4. Une compagnie vend 52 billets pour 50 places, chaque passager se présentant avec la probabilité 0,9. Au moins un passager ne peut pas embarquer si le nombre X de passagers présents vérifie :

- A. $X \geq 51$ (**bonne réponse**)
- B. $X \geq 50$
- C. $X = 52$
- D. $X \leq 50$

Justification : Il y a 50 places : dès qu'on dépasse 50 présents, quelqu'un est refusé.

5. La fonction `seuil(p, a)` du cours, qui utilise une boucle `while`, renvoie :

- A. le plus grand n tel que $1 - (1 - p)^n \geq a$
- B. le plus petit n tel que $1 - (1 - p)^n \geq a$ (**bonne réponse**)
- C. toujours 1
- D. la valeur de $1 - (1 - p)^n$

Justification : La boucle s'arrête dès que la condition est satisfaite pour la première fois.

6. Dans l'exercice 1, quel est le plus petit nombre de pièces à contrôler pour que la probabilité d'au moins une défectueuse soit d'au moins 0,9 (avec $p = 0,05$) ?

- A. 44
- B. 20
- C. 90
- D. 45 (**bonne réponse**)

Justification : $1 - 0,95^n \geq 0,9 \iff n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,95} \approx 44,9$: le plus petit entier est 45.

7. Dans l'exercice 2 (surréservation, 52 billets pour 50 places, $p = 0,9$), quelle est la probabilité qu'au moins un passager ne puisse pas embarquer ?

- A. 1
- B. environ 0,9
- C. environ 0,5
- D. **environ 0,0283 (bonne réponse)**

Justification : $P(X \geq 51) = P(X = 51) + P(X = 52) \approx 0,0241 + 0,0042 \approx 0,0283$.

8. Dans l'exercice 3 (pièce équilibrée ou truquée choisie au hasard, trois « pile » obtenus), quelle est la probabilité que la pièce soit la truquée ?

- A. 0,3185
- B. $\frac{512}{637} \approx 0,804$ **(bonne réponse)**
- C. 0,512
- D. 0,5

Justification : $P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P(A)} = \frac{0,5 \times 0,512}{0,3185} \approx 0,804$.

9. Dans l'exercice 4 (règle de décision, échantillon de 50, au plus 2 défectueuses), pour $p = 0,10$, quelle est la probabilité d'acceptation du lot ?

- A. 1
- B. **environ 0,112 (bonne réponse)**
- C. environ 0,677
- D. environ 0,5

Justification : Avec la calculatrice pour $\mathcal{B}(50; 0,10)$, $P(X \leq 2) \approx 0,112$, bien plus faible qu'avec $p = 0,04$.

10. Dans l'exercice 5, que renvoie `seuil(0.02, 0.99)` ?

- A. **228 (bonne réponse)**
- B. 99
- C. 100
- D. 45

Justification : On résout $1 - 0,98^n \geq 0,99$, soit $n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,98} \approx 227,9$: le plus petit entier est 228.