

Fiche 3 : la loi binomiale

Huit exercices pour maîtriser la loi binomiale :

- reconnaître (ou non) un modèle binomial ;
- écrire la loi complète, l'espérance, la variance et l'écart-type ;
- calculer $P(X = k)$, $P(X \leq k)$, $P(X \geq k)$;
- un QCM répondu au hasard ;
- le mode d'une loi binomiale (démonstration) ;
- un gain aléatoire ;
- des scripts Python ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- le modèle est **justifié** avec n , p et le succès ;
- la formule de $P(X = k)$ est citée ;
- les inégalités sont traitées avec les complémentaires ;
- l'espérance et la variance sont interprétées.

Le modèle de rédaction d'une loi binomiale

« On répète 10 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,3$ (succès : « la pièce est défectueuse »).

Soit X le nombre de succès.

Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,3)$.

Pour tout entier k compris entre 0 et 10 : $P(X = k) = \binom{10}{k} 0,3^k 0,7^{10-k}$.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^7 = 120 \times 0,027 \times 0,0823543 \approx 0,267. \text{ »}$$

- Écris n , p et ce qu'est un succès.
- Cite la formule, puis remplace.
- Arrondis à la fin (trois chiffres significatifs).

Les pièges classiques

- Ne pas **justifier** l'indépendance ou la répétition à l'identique.
- Confondre $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$ avec $1 - P(X \leq k)$.
- Oublier le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
- Utiliser $p^k(1-p)^k$ au lieu de $p^k(1-p)^{n-k}$.

Une loi binomiale, c'est un arbre qu'on a élagué : on ne garde que le nombre de succès, plus l'ordre.

Exercice 1 (★) : reconnaître une loi binomiale

Dans chaque cas, dire si X suit une loi binomiale et, si oui, donner ses paramètres :

- On lance 10 fois un dé équilibré. X est le nombre de « 6 » obtenus.
- On tire simultanément 3 boules dans une urne de 10 boules dont 4 rouges. X est le nombre de boules rouges.
- Un élève répond au hasard aux 20 questions d'un QCM à 4 propositions dont une seule est exacte. X est le nombre de bonnes réponses.
- On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un « 6 ». X est le nombre de lancers.

Correction de l'exercice 1

Cas a

On répète 10 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « obtenir 6 », de probabilité $\frac{1}{6}$.

X suit $\mathcal{B}\left(10; \frac{1}{6}\right)$.

Cas b

Le tirage est simultané, donc **sans remise** : les tirages successifs ne sont pas indépendants.

X ne suit pas une loi binomiale. (Elle suit une loi hypergéométrique, hors programme.)

Cas c

Chacune des 20 questions est une épreuve de Bernoulli indépendante, de succès « bonne réponse », de probabilité $\frac{1}{4}$.

X suit $\mathcal{B}(20; 0,25)$.

Cas d

Le nombre d'épreuves n'est pas fixé à l'avance : X est un **rang**, pas un nombre de succès.

X ne suit pas une loi binomiale (c'est le rang du premier succès).

Exercice 2 (★★) : la loi complète

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(5; 0,4)$.

1. Donner la loi de X sous forme de tableau et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$.
3. Calculer $P(X \geq 3)$.

Correction de l'exercice 2

Question 1

$$P(X = k) = \binom{5}{k} 0,4^k 0,6^{5-k}.$$

$$P(X = 0) = 0,6^5 = 0,07776$$

$$P(X = 1) = 5 \times 0,4 \times 0,6^4 = 0,2592$$

$$P(X = 2) = 10 \times 0,4^2 \times 0,6^3 = 0,3456$$

$$P(X = 3) = 10 \times 0,4^3 \times 0,6^2 = 0,2304$$

$$P(X = 4) = 5 \times 0,4^4 \times 0,6 = 0,0768$$

$$P(X = 5) = 0,4^5 = 0,01024$$

La somme est $0,07776 + 0,2592 + 0,3456 + 0,2304 + 0,0768 + 0,01024 = 1$

Question 2

$$E(X) = np = 5 \times 0,4$$

$$E(X) = 2$$

$$V(X) = np(1 - p) = 5 \times 0,4 \times 0,6$$

$$V(X) = 1,2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1,2} \approx 1,095$$

Question 3

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,2304 + 0,0768 + 0,01024$$

$$P(X \geq 3) = 0,31744$$

Exercice 3 (★★) : un lot de pièces

Dans un lot, chaque pièce est défectueuse avec la probabilité **0,3**, indépendamment des autres. On prélève 10 pièces. X est le nombre de pièces défectueuses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
2. Calculer $P(X = 3)$.
3. Calculer $P(X \leq 2)$.
4. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une pièce défectueuse.

Correction de l'exercice 3

Question 1

On répète 10 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « la pièce est défectueuse », de probabilité **0,3**.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,3)$.

Question 2

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^7 = 120 \times 0,027 \times 0,0823543$$

$$P(X = 3) \approx 0,267$$

Question 3

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X = 0) = 0,7^{10} \approx 0,0282, P(X = 1) = 10 \times 0,3 \times 0,7^9 \approx 0,1211, P(X = 2) = 45 \times 0,3^2 \times 0,7^8 \approx 0,2335$$

$$P(X \leq 2) \approx 0,383$$

(Avec la calculatrice : fonction de répartition binomiale.)

Question 4

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,7^{10}$$

$$P(X \geq 1) \approx 0,972$$

Exercice 4 (★★) : le QCM au hasard

Un QCM comporte 20 questions, chacune à 4 propositions dont une seule exacte. Un élève répond au hasard. X est le nombre de bonnes réponses.

1. Donner la loi de X .
2. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Calculer $P(X = 10)$ et $P(X \geq 10)$. Commenter.

Correction de l'exercice 4

Question 1

Les 20 réponses sont indépendantes, avec la probabilité de succès 0,25.

X suit $\mathcal{B}(20; 0,25)$.

Question 2

$$E(X) = 20 \times 0,25$$

$$E(X) = 5$$

$$V(X) = 20 \times 0,25 \times 0,75 = 3,75$$

$$\sigma(X) = \sqrt{3,75} \approx 1,94$$

Question 3

$$P(X = 10) = \binom{20}{10} \times 0,25^{10} \times 0,75^{10}$$

$$P(X = 10) \approx 0,0099$$

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$$

$$P(X \geq 10) \approx 0,0139$$

Commentaire : en répondant au hasard, l'élève a environ 1,4 % de chances d'obtenir la moyenne ou plus. La note attendue est 5 bonnes réponses sur 20.

Exercice 5 (★★★) : le mode d'une loi binomiale

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $0 < p < 1$.

1. Montrer que, pour $0 \leq k \leq n - 1$: $\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{(n - k)p}{(k + 1)(1 - p)}$.
2. Montrer que $P(X = k + 1) > P(X = k) \iff k + 1 < (n + 1)p$.
3. Application : déterminer la valeur la plus probable de X pour $\mathcal{B}(10; 0,3)$.

Correction de l'exercice 5

Question 1

$$\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} \times \frac{p}{1-p}$$

$$\text{Or } \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{n-k}{k+1}.$$

$$\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$$

Question 2

Comme toutes les probabilités sont strictement positives, $P(X = k + 1) > P(X = k)$ équivaut à un rapport supérieur à 1 :

$$(n-k)p > (k+1)(1-p) \iff np - kp > k+1 - kp - p \iff (n+1)p > k+1$$

$$P(X = k + 1) > P(X = k) \iff k+1 < (n+1)p$$

Question 3

Pour $n = 10$ et $p = 0,3$: $(n+1)p = 3,3$. La suite $P(X = k)$ croît tant que $k+1 < 3,3$, c'est-à-dire pour $k = 0, 1, 2$, puis décroît.

Donc $P(X = 3)$ est la plus grande probabilité.

La valeur la plus probable est 3 ($P(X = 3) \approx 0,267$).

Exercice 6 (★★) : un jeu de pile ou face

Un joueur lance 10 fois une pièce truquée qui donne « pile » avec la probabilité 0,6.

Il gagne 3 € par pile et perd 2 € par face.

On note X le nombre de « pile » et G son gain algébrique.

1. Exprimer G en fonction de X .

2. Calculer $E(G)$, $V(G)$ et $\sigma(G)$.

Correction de l'exercice 6

Question 1

X suit $\mathcal{B}(10; 0,6)$. Il y a X piles et $10 - X$ faces :

$$G = 3X - 2(10 - X) = 5X - 20$$

Question 2

$$E(X) = 10 \times 0,6 = 6 \text{ et } V(X) = 10 \times 0,6 \times 0,4 = 2,4.$$

$$E(G) = 5E(X) - 20 = 30 - 20$$

$$E(G) = 10$$

$$V(G) = 5^2 V(X) = 25 \times 2,4$$

$$V(G) = 60$$

$$\sigma(G) = \sqrt{60} \approx 7,75$$

Interprétation : en moyenne, le joueur gagne 10 € sur 10 lancers, avec un écart-type d'environ 7,75 €.

Exercice 7 (★★) : Python

On utilise les fonctions du cours :

```
from math import comb

def binomiale(n, p, k):
    return comb(n, k) * p**k * (1 - p)**(n - k)

def repartition(n, p, k):
    return sum(binomiale(n, p, i) for i in range(k + 1))
```

1. Que renvoient `binomiale(5, 0.4, 2)` et `repartition(10, 0.3, 2)` ? Retrouver ces valeurs.
2. Écrire une fonction `loi(n, p)` qui renvoie la liste des $P(X = k)$ pour k de 0 à n , puis un test qui vérifie que la somme vaut 1 (à 10^{-12} près) pour $\mathcal{B}(20; 0,25)$.

Correction de l'exercice 7

Question 1

`binomiale(5, 0.4, 2)` renvoie 0.3456 : c'est $P(X = 2)$ de l'exercice 2.

`repartition(10, 0.3, 2)` renvoie environ 0.3828 : c'est $P(X \leq 2)$ de l'exercice 3.

Les valeurs coïncident avec les calculs.

Question 2

```
def loi(n, p):
    return [binomiale(n, p, k) for k in range(n + 1)]

L = loi(20, 0.25)
print(abs(sum(L) - 1) < 1e-12)
```

Le script affiche `True` : la somme des probabilités est $(0,25 + 0,75)^{20} = 1$ (formule du binôme), aux erreurs d'arrondi près.

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $P(X = 0) = (1 - p)^n$.
2. L'espérance d'une loi binomiale est toujours un entier.
3. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $n - X \sim \mathcal{B}(n, 1 - p)$.
4. $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k)$.
5. Si $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$, alors $P(X = k) = P(X = n - k)$.

Correction de l'exercice 8

Affirmation 1

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} p^0 (1 - p)^n = (1 - p)^n.$$

Vrai.

Affirmation 2

Contre-exemple : $n = 5$ et $p = 0,4$ donnent $E(X) = 2$, mais avec $p = 0,3$, $E(X) = 1,5$.

Faux.

Affirmation 3

$n - X$ est le nombre d'échecs, chaque épreuve étant un échec avec la probabilité $1 - p$.

Vrai.

Affirmation 4

$$1 - P(X \leq k) = P(X > k) = P(X \geq k + 1), \text{ différent de } P(X \geq k).$$

Faux. Il faut $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$.

Affirmation 5

$$P(X = n - k) = \binom{n}{n - k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n = P(X = k).$$

Vrai.

Exercice 9 (★★) : la planche de Galton

Dans une planche de Galton à 10 rangées, une bille rencontre 10 clous. À chaque clou, elle va à droite avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou à gauche avec la probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment des clous précédents. On note K le nombre de déplacements à droite : la bille tombe dans la case K .

1. Quelle est la loi de K ?
2. Calculer $P(K = 5)$ et $P(4 \leq K \leq 6)$.
3. Calculer $E(K)$. Commenter le résultat sur la figure.

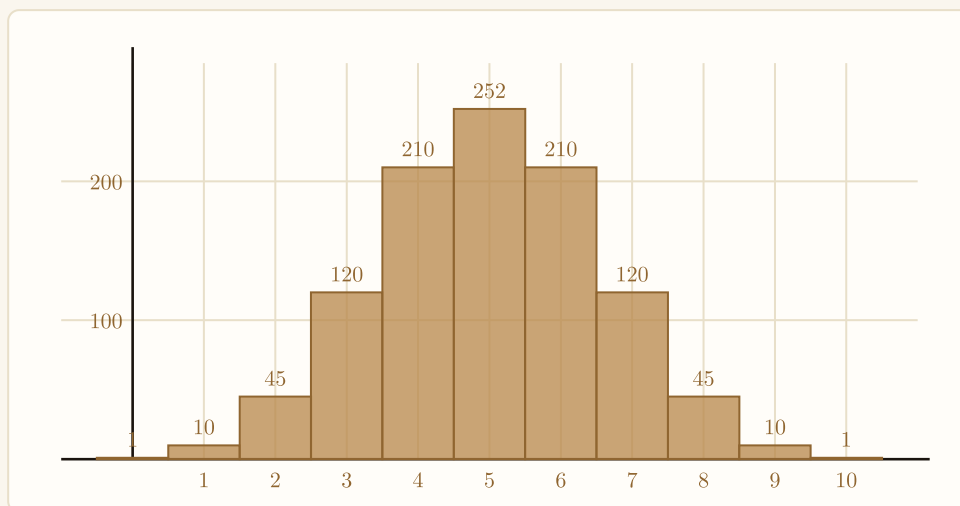


Planche de Galton à 10 rangées : effectifs sur 1024 billes selon la case d'arrivée k

Correction de l'exercice 9

Question 1

Dix épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès « droite » égale à $\frac{1}{2}$.

K suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10; \frac{1}{2}\right)$.

Question 2

$$P(K = k) = \binom{10}{k} \frac{1}{2^{10}} = \frac{\binom{10}{k}}{1024}.$$

$$P(K = 5) = \frac{252}{1024} \approx 0,246.$$

$$P(4 \leq K \leq 6) = \frac{210 + 252 + 210}{1024} = \frac{672}{1024} \approx 0,656.$$

$$P(K = 5) \approx 0,246 \text{ et } P(4 \leq K \leq 6) \approx 0,656.$$

Question 3

$$E(K) = np = 10 \times \frac{1}{2} = 5.$$

L'histogramme est **symétrique** autour de 5 et en forme de cloche : les billes se concentrent au centre.

Ce qui peut tomber au bac

- **Reconnaître et justifier** une loi binomiale, avec n , p et le succès (exercices 1, 3, 4).
- Calculer $P(X = k)$, $P(X \leq k)$, $P(X \geq k)$ (exercices 2, 3, 4).
- **Espérance, variance** et interprétation (exercices 2, 4, 6).
- Un **script Python** pour la loi binomiale (exercice 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est l'espérance d'une variable de loi $\mathcal{B}(5; 0,4)$?

- A. 2 (**bonne réponse**)
- B. 0,4
- C. 5
- D. 1,2

Justification : $E(X) = np = 5 \times 0,4 = 2$. La variance vaut $np(1-p) = 1,2$.

2. Quelle est la formule de $P(X = k)$ pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$?

- A. $p^k (1-p)^k$
- B. np^k
- C. $\binom{n}{k} p^{n-k} (1-p)^k$
- D. $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (**bonne réponse**)

Justification : $\binom{n}{k}$ chemins à k succès, chacun de probabilité $p^k (1-p)^{n-k}$.

3. Pour $X \sim \mathcal{B}(10; 0,3)$, que vaut $P(X \geq 1)$?

- A. $1 - 0,3^{10}$

- B. $10 \times 0,3$
- C. $1 - 0,7^{10}$ (**bonne réponse**)
- D. $0,3^{10}$

Justification : L'événement contraire de « au moins un succès » est « aucun succès ».

4. Pour justifier que X suit une loi binomiale, il faut :

- A. que $p = \frac{1}{2}$
- B. que les épreuves soient au nombre de deux
- C. n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, et X compte les succès (**bonne réponse**)
- D. que le tirage soit sans remise

Justification : Il faut annoncer le succès, n et p , et justifier indépendance et répétition à l'identique.

5. Un élève répond au hasard à 20 questions à 4 propositions. Combien de bonnes réponses obtient-il en moyenne ?

- A. 0,25
- B. 4
- C. 20
- D. 5 (**bonne réponse**)

Justification : $X \sim \mathcal{B}(20; 0,25)$ et $E(X) = 20 \times 0,25 = 5$.

6. Dans l'exercice 2, pour $X \sim \mathcal{B}(5; 0,4)$, que vaut $V(X)$?

- A. $\sqrt{1,2}$
- B. 1,2 (**bonne réponse**)
- C. 0,4
- D. 2

Justification : $V(X) = np(1 - p) = 5 \times 0,4 \times 0,6 = 1,2$.

7. Dans l'exercice 3 (pièces défectueuses, $p = 0,3$, $n = 10$), que vaut $P(X \geq 1)$?

- A. environ 0,972 (**bonne réponse**)
- B. 1
- C. environ 0,267
- D. environ 0,028

Justification : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,7^{10} \approx 0,972$.

8. Dans l'exercice 4 (QCM de 20 questions, 4 propositions), quelle est l'espérance du nombre de bonnes réponses en répondant au hasard ?

- A. 4
- B. 20

C. 5 (bonne réponse)

D. 10

Justification : $X \sim \mathcal{B}(20; 0,25)$ et $E(X) = np = 20 \times 0,25 = 5$.

9. Dans l'exercice 5, pour $X \sim \mathcal{B}(10; 0,3)$, quelle est la valeur la plus probable ?

A. 4

B. 2

C. 3 (bonne réponse)

D. 0

Justification : $(n+1)p = 3,3$: la suite $P(X = k)$ croît jusqu'à $k = 3$ puis décroît, donc le maximum est en $k = 3$.

10. Dans l'exercice 6, avec X le nombre de « pile » sur 10 lancers ($p = 0,6$) et $G = 5X - 20$, que vaut $E(G)$?

A. 10 (bonne réponse)

B. 30

C. -20

D. 6

Justification : $E(X) = 6$, donc $E(G) = 5 \times 6 - 20 = 10$.