

Fiche 2 : épreuves indépendantes et schéma de Bernoulli

Huit exercices pour maîtriser les successions d'épreuves :

- lancers d'une pièce, équilibrée ou non ;
- tirages avec remise ;
- deux épreuves différentes indépendantes ;
- tirs répétés ;
- rang du premier succès ;
- tirage sans remise : pourquoi ce n'est pas un schéma de Bernoulli ;
- fiabilité de systèmes en série et en parallèle ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- le modèle est justifié (« épreuves identiques et indépendantes ») ;
- les événements sont définis par des lettres ;
- les chemins de l'arbre sont dénombrés et multipliés ;
- « au moins un » est traité par l'événement contraire ;
- la conclusion est en contexte.

Le modèle de rédaction d'une succession d'épreuves

« On note R_i l'événement « la i -ème boule tirée est rouge ».

Le tirage est avec remise : les trois tirages sont indépendants et $P(R_i) = 0,4$ à chaque tirage.

Donc :

$$P(\text{au moins une rouge}) = 1 - P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3}) = 1 - 0,6^3 = 0,784. »$$

- **Nomme les événements** de chaque épreuve.
- **Justifie l'indépendance** (avec remise, épreuves distinctes, énoncé).
- **Multiplie** le long d'un chemin, **additionne** les chemins compatibles.

Les pièges classiques

- Multiplier des probabilités d'épreuves **non indépendantes** (tirage sans remise).
- Oublier de **compter les chemins** : « exactement 2 piles sur 3 lancers » compte 3 chemins, pas un seul.
- Oublier de justifier l'indépendance.
- Écrire $1 - p^n$ au lieu de $1 - (1 - p)^n$ pour « au moins un succès ».

Sans remise, chaque tirage change l'urne : ce n'est plus une répétition, c'est une conversation.

Exercice 1 (★) : trois lancers

1. On lance trois fois une pièce équilibrée.

Combien y a-t-il d'issues ?

Quelle est la probabilité de chacune ?

Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux « pile ».

2. La pièce est truquée : « pile » sort avec la probabilité 0,3. Calculer la probabilité de la suite (pile, pile, face), puis d'obtenir exactement deux « pile » en trois lancers.

Correction de l'exercice 1

Question 1

Chaque lancer a deux issues : $2^3 = 8$ issues (P, F). Les lancers sont indépendants et la pièce est équilibrée : chaque issue a pour probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

8 issues, de probabilité $\frac{1}{8}$ chacune.

« Exactement deux pile » : PPF, PFP, FPP, soit 3 issues (on choisit la place du « face » parmi 3).

$$P = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Question 2

Les lancers sont indépendants, avec $P(P) = 0,3$ et $P(F) = 0,7$:

$$P(\text{PPF}) = 0,3 \times 0,3 \times 0,7$$

$$P(\text{PPF}) = 0,063$$

Les trois issues « exactement deux pile » ont la même probabilité $0,3^2 \times 0,7 = 0,063$.

$$P(\text{exactement deux pile}) = 3 \times 0,063 = 0,189$$

Exercice 2 (★★) : tirages avec remise

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules vertes. On tire successivement et **avec remise** trois boules.

1. Justifier que les trois tirages sont indépendants.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge.
3. Calculer la probabilité que la première boule rouge apparaisse au troisième tirage.
4. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux boules rouges.

Correction de l'exercice 2

Question 1

Après chaque tirage, la boule est remise : la composition de l'urne est la même à chaque tirage. Les trois tirages sont donc **identiques et indépendants**, avec $P(R) = \frac{4}{10} = 0,4$ à chaque tirage.

Question 2

On passe à l'événement contraire : « aucune rouge » est « verte, verte, verte ».

$$P(\text{aucune rouge}) = 0,6^3 = 0,216$$

$$P(\text{au moins une rouge}) = 1 - 0,216 = 0,784$$

Question 3

La première rouge au troisième tirage est la suite (V, V, R).

$$P = 0,6 \times 0,6 \times 0,4$$

$$P = 0,144$$

Question 4

« Exactement deux rouges » : RRV, RVR, VRR. Chaque suite a pour probabilité $0,4^2 \times 0,6 = 0,096$.

$$P = 3 \times 0,096$$

$$P = 0,288$$

Exercice 3 (★★) : deux épreuves différentes

On lance un dé équilibré à six faces, puis une pièce équilibrée. Les deux lancers sont indépendants.

Calculer la probabilité :

1. d'obtenir un nombre pair **et** « pile » ;
2. d'obtenir un **6 ou** « pile » ;
3. d'obtenir un nombre impair **et** « face ».

Correction de l'exercice 3

On note D : « le dé donne un nombre pair », S : « le dé donne 6 », P : « pile ».

Question 1

Les lancers sont indépendants : $P(D \cap P) = P(D) \times P(P) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$$P(D \cap P) = \frac{1}{4}$$

Question 2

On passe à l'événement contraire : « ni 6, ni pile ».

$$P(\overline{S} \cap \overline{P}) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$

$$P(S \cup P) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

Question 3

$$P(\overline{D} \cap \overline{P}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{1}{4}$$

Exercice 4 (★★) : des tirs répétés

Un archer atteint la cible avec la probabilité 0,7 à chaque tir. Ses tirs sont indépendants. Il tire 4 fois.

Calculer la probabilité d'atteindre la cible :

1. quatre fois ;
2. aucune fois ;
3. au moins une fois ;
4. exactement une fois.

Correction de l'exercice 4

Les quatre tirs sont indépendants, avec la probabilité de succès $p = 0,7$ et d'échec $0,3$.

Question 1

$$P(4 \text{ succès}) = 0,7^4 = 0,2401$$

Question 2

$$P(\text{aucun succès}) = 0,3^4 = 0,0081$$

Question 3

L'événement contraire de « au moins une fois » est « aucune fois ».

$$P(\text{au moins une}) = 1 - 0,0081 = 0,9919$$

Question 4

Il y a 4 places possibles pour l'unique succès. Chaque suite a pour probabilité $0,7 \times 0,3^3$.

$$P(\text{exactement une}) = 4 \times 0,7 \times 0,3^3 = 0,0756$$

Exercice 5 (★★★) : le rang du premier succès

On répète une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,2$, les épreuves étant indépendantes. On note T le rang du premier succès.

1. Exprimer $P(T = n)$ pour $n \geq 1$. Calculer $P(T = 4)$.
2. Calculer la probabilité d'obtenir le premier succès au plus tard à la quatrième épreuve.
3. Montrer que $P(T > n) = (1 - p)^n$.

Correction de l'exercice 5

Question 1

« $T = n$ » signifie : $n - 1$ échecs puis un succès. Les épreuves sont indépendantes :

$$P(T = n) = (1 - p)^{n-1} p$$

Pour $p = 0,2$ et $n = 4$: $P(T = 4) = 0,8^3 \times 0,2$.

$$P(T = 4) = 0,1024$$

Question 2

L'événement contraire de $\{T \leq 4\}$ est « les quatre premières épreuves sont des échecs ».

$$P(T > 4) = 0,8^4 = 0,4096$$

$$P(T \leq 4) = 1 - 0,4096 = 0,5904$$

Question 3

$T > n$ signifie que les n premières épreuves sont des échecs. Par indépendance :

$$P(T > n) = (1 - p)^n \blacksquare$$

Exercice 6 (★★) : avec remise ou sans remise

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules noires. On tire deux boules.

1. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges si le tirage est **avec remise**.
2. La calculer si le tirage est **sans remise**.
3. Pourquoi le second tirage n'est-il pas un schéma de Bernoulli ?

Correction de l'exercice 6

Question 1

Avec remise, les tirages sont indépendants, avec $P(R) = \frac{3}{5}$.

$$P(RR) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 0,36$$

Question 2

Sans remise, après une rouge, il reste 2 rouges sur 4 boules :

$$P(RR) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 0,3$$

Question 3

Sans remise, la probabilité de « rouge » au second tirage dépend du résultat du premier : les tirages **ne sont pas indépendants** (ni de même probabilité conditionnellement).

Ce n'est pas un schéma de Bernoulli, et le nombre de rouges ne suit pas une loi binomiale.

Exercice 7 (★★★) : fiabilité d'un système

Trois composants A , B , C fonctionnent de façon indépendante avec les probabilités 0,9, 0,8 et 0,7.

1. Deux composants A et B sont montés **en série** (le système fonctionne si les deux fonctionnent). Calculer la probabilité de fonctionnement.
2. Ils sont montés **en parallèle** (le système fonctionne si au moins un fonctionne). Calculer la probabilité de fonctionnement.
3. Le composant A est en série avec le bloc formé de B et C en parallèle. Calculer la probabilité de fonctionnement du système.

Correction de l'exercice 7

On note A , B , C les événements « le composant fonctionne ». $P(A) = 0,9$, $P(B) = 0,8$, $P(C) = 0,7$.

Question 1

Le montage en série fonctionne si A et B fonctionnent. Par indépendance :

$$P(A \cap B) = 0,9 \times 0,8$$

$$P = 0,72$$

Question 2

Le montage en parallèle est en panne si A et B sont en panne. Par indépendance :

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$$

$$P = 1 - 0,02 = 0,98$$

Question 3

Le bloc $\{B, C\}$ en parallèle fonctionne avec la probabilité :

$$1 - P(\overline{B} \cap \overline{C}) = 1 - 0,2 \times 0,3 = 1 - 0,06 = 0,94$$

Le système est en série : A et le bloc fonctionnent. Les événements sont indépendants :

$$P = 0,9 \times 0,94$$

$$P = 0,846$$

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. On lance 5 fois un dé équilibré. La probabilité d'obtenir cinq fois le 6 est $\left(\frac{1}{6}\right)^5$.
2. Sur n épreuves de Bernoulli de paramètre p , la probabilité d'au moins un succès est $1 - p^n$.
3. Le nombre de chemins d'un arbre à 3 niveaux binaires menant à exactement 2 succès est 3.
4. Si $P(A) = 0,9$ et $P(B) = 0,9$ et si A, B sont indépendants, alors $P(A \cap B) = 0,81$.

Correction de l'exercice 8

Affirmation 1

Les lancers sont indépendants : $P = \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{1}{7776}$.

Vrai.

Affirmation 2

La probabilité de « aucun succès » est $(1 - p)^n$: la probabilité d'au moins un succès est $1 - (1 - p)^n$, et non $1 - p^n$.

Faux.

Affirmation 3

On choisit les 2 places des succès parmi 3 : $\binom{3}{2} = 3$ chemins.

Vrai.

Affirmation 4

Par indépendance : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,9 \times 0,9$.

Vrai.**Ce qui peut tomber au bac**

- Des **suites de lancers ou de tirages avec remise**, avec « au moins un » (exercices 1, 2, 4).
- Des **épreuves différentes indépendantes** (exercice 3).
- Le **rang du premier succès** (exercice 5).
- La différence **avec / sans remise** (exercice 6).
- La **fiabilité** d'un système (exercice 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. On lance **3** fois une pièce où « pile » sort avec la probabilité **0,3**. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement **2** « pile » ?

A. 0,189 (**bonne réponse**)
 B. 0,063
 C. 0,09
 D. 0,3

Justification : Il y a **3** suites possibles, chacune de probabilité $0,3^2 \times 0,7 = 0,063$.

2. Urne de **4** rouges et **6** vertes, **3** tirages **avec remise**. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une rouge ?

A. 0,4
 B. 0,064
 C. 0,784 (**bonne réponse**)
 D. 0,216

Justification : Contraire : aucune rouge, $0,6^3 = 0,216$, donc $1 - 0,216 = 0,784$.

3. Un tirage **sans remise** dans une petite urne est-il un schéma de Bernoulli ?

A. Oui, si l'urne contient deux couleurs
 B. Oui, toujours
 C. Oui, si on tire deux boules
 D. **Non, les tirages ne sont pas indépendants (bonne réponse)**

Justification : La composition de l'urne change à chaque tirage.

4. Pour une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p , quelle est la probabilité que le premier succès ait lieu à l'épreuve n ?

A. $(1 - p)^{n-1} p$ (**bonne réponse**)
 B. np
 C. p^n
 D. $(1 - p)^n$

Justification : $n - 1$ échecs puis un succès.

5. Deux composants indépendants fonctionnent avec les probabilités **0,9** et **0,8**. Quelle est la probabilité que les deux fonctionnent (montage en série) ?

A. 0,17
 B. 0,85
 C. 0,98
 D. 0,72 (**bonne réponse**)

Justification : Par indépendance : $0,9 \times 0,8 = 0,72$.

6. Dans l'exercice 1, une pièce truquée donne « pile » avec la probabilité **0,3**. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux « pile » en trois lancers ?

- A. 0,3
- B. 0,063
- C. 0,189 (**bonne réponse**)
- D. 0,027

Justification : Il y a **3** façons de placer les deux « pile », chacune de probabilité $0,3^2 \times 0,7 = 0,063$: au total $3 \times 0,063 = 0,189$.

7. Dans l'exercice 2 (urne de **4** rouges, **6** vertes, tirage avec remise de **3** boules), quelle est la probabilité que la première boule rouge apparaisse au troisième tirage ?

- A. 0,064
- B. 0,4
- C. 0,216
- D. 0,144 (**bonne réponse**)

Justification : C'est la suite (verte, verte, rouge) : $0,6 \times 0,6 \times 0,4 = 0,144$.

8. Dans l'exercice 4 (archer, probabilité de succès **0,7**, **4** tirs), quelle est la probabilité d'atteindre la cible exactement une fois ?

- A. 0,0756 (**bonne réponse**)
- B. 0,9919
- C. 0,2401
- D. 0,0081

Justification : Il y a **4** places pour l'unique succès, chacune de probabilité $0,7 \times 0,3^3$: $4 \times 0,7 \times 0,027 = 0,0756$.

9. Dans l'exercice 5, avec $p = 0,2$, quelle est la probabilité que le premier succès survienne au rang **4** ?

- A. 0,1024 (**bonne réponse**)
- B. 0,2
- C. $0,8^4$
- D. 0,0016

Justification : $P(T = 4) = (1 - p)^3 p = 0,8^3 \times 0,2 = 0,1024$.

10. Dans l'exercice 7 (fiabilité, composant **A** en série avec le bloc $\{B, C\}$ en parallèle), quelle est la probabilité de fonctionnement du système complet ?

- A. 0,98
- B. 0,504
- C. 0,846 (**bonne réponse**)

D. 0,72

Justification : Le bloc $\{B, C\}$ en parallèle fonctionne avec la probabilité $1 - 0,2 \times 0,3 = 0,94$; en série avec A : $0,9 \times 0,94 = 0,846$.