

Fiche 1 : probabilités conditionnelles et indépendance

Huit exercices pour maîtriser les probabilités conditionnelles :

- lecture et calcul avec un arbre pondéré ;
- formule des probabilités totales et inversion du conditionnement (dépistage) ;
- partition à trois événements (machines) ;
- indépendance de deux événements ;
- tirages sans remise ;
- épreuve à deux niveaux ;
- démonstration d'une propriété de l'indépendance ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- événements **définis** par des lettres ;
- données de l'énoncé traduites en probabilités ;
- formule citée (composées, totales) ;
- résultat sous forme de **fraction irréductible** puis de valeur approchée ;
- conclusion en contexte.

Le modèle de rédaction d'une probabilité conditionnelle

« On note M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

D'après l'énoncé, $P(M) = 0,02$, $P_M(T) = 0,95$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,90$, donc $P_{\overline{M}}(T) = 0,10$.

$(M, \overline{M})$ est une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M) P_M(T) + P(\overline{M}) P_{\overline{M}}(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,10 = 0,117.$$

$$\text{Donc } P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,019}{0,117} = \frac{19}{117} \approx 0,162. \text{ »}$$

- **Définis les événements**, puis **traduis chaque donnée** en probabilité.
- **Cite la formule** utilisée : composées, totales, définition de $P_B(A)$.
- **Conclus par une phrase** en contexte.

Les pièges classiques

- Confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
- Oublier de traduire « sachant que » par une probabilité **conditionnelle**.
- Oublier un chemin de l'arbre dans la formule des probabilités totales.
- Conclure à l'indépendance sans avoir vérifié $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Un test positif à 95 % de fiabilité ne veut pas dire 95 % de chances d'être malade. Les probabilités conditionnelles ont ruiné plus d'inquiétudes que d'assurances.

Exercice 1 (★) : lire un arbre pondéré

Deux événements A et B vérifient :

- $P(A) = 0,4$;
- $P_A(B) = 0,7$;
- $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$.

1. Calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(\bar{A} \cap B)$.
2. Calculer $P(B)$.
3. Calculer $P_B(A)$.

Correction de l'exercice 1

Question 1

D'après la formule des probabilités composées, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

$$P(A \cap B) = 0,4 \times 0,7$$

$$P(A \cap B) = 0,28$$

$$P_A(\bar{B}) = 1 - 0,7 = 0,3, \text{ donc } P(A \cap \bar{B}) = 0,4 \times 0,3.$$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0,12$$

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6, \text{ donc } P(\bar{A} \cap B) = 0,6 \times 0,2.$$

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,12$$

Question 2

$(A, \bar{A})$ est une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,28 + 0,12$$

$$P(B) = 0,40$$

Question 3

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,28}{0,40}$$

$$P_B(A) = 0,7$$

Exercice 2 (★★) : le dépistage

Une maladie touche 2 % d'une population. Un test la détecte chez 95 % des malades. Il est négatif chez 90 % des personnes non malades.

On choisit une personne au hasard dans la population.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le test soit positif.
3. Le test est positif. Quelle est la probabilité que la personne soit malade ?
4. Le test est négatif. Quelle est la probabilité que la personne ne soit pas malade ?

Correction de l'exercice 2

On note M : « la personne est malade » et T : « le test est positif ».

Les données donnent $P(M) = 0,02$, $P_M(T) = 0,95$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,90$.

Question 1

L'arbre pondéré :

- M (0,02)
 - T (0,95)
 - $\overline{T}$ (0,05)
- $\overline{M}$ (0,98)
 - T (0,10)
 - $\overline{T}$ (0,90)

Question 2

$(M, \overline{M})$ est une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,10 = 0,019 + 0,098$$

$$P(T) = 0,117$$

Question 3

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,019}{0,117}$$

$$P_T(M) = \frac{19}{117} \approx 0,162$$

Interprétation : malgré un test « fiable », un test positif ne signale un malade que dans environ 16 % des cas, car la maladie est rare : les faux positifs sont plus nombreux que les vrais.

Question 4

$$P(\overline{T}) = 1 - 0,117 = 0,883 \text{ et } P(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0,98 \times 0,90 = 0,882.$$

$$P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{0,882}{0,883}$$

$$P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{882}{883} \approx 0,9989$$

Exercice 3 (★★) : trois machines

Une usine possède trois machines M_1 , M_2 , M_3 qui produisent respectivement 50 %, 30 % et 20 % des pièces. Les taux de pièces défectueuses sont 2 %, 3 % et 5 %.

On prélève une pièce au hasard. On note D l'événement « la pièce est défectueuse ».

1. Calculer $P(D)$.
2. La pièce est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle vienne de chacune des trois machines. Que constate-t-on ?

Correction de l'exercice 3

On note M_i : « la pièce vient de la machine M_i ».

$$P(M_1) = 0,5, P(M_2) = 0,3, P(M_3) = 0,2 \text{ et } P_{M_1}(D) = 0,02, P_{M_2}(D) = 0,03, P_{M_3}(D) = 0,05.$$

Question 1

(M_1, M_2, M_3) est une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = 0,5 \times 0,02 + 0,3 \times 0,03 + 0,2 \times 0,05 = 0,010 + 0,009 + 0,010$$

$$P(D) = 0,029$$

Question 2

$$P_D(M_1) = \frac{0,010}{0,029}$$

$$P_D(M_1) = \frac{10}{29} \approx 0,345$$

$$P_D(M_2) = \frac{0,009}{0,029}$$

$$P_D(M_2) = \frac{9}{29} \approx 0,310$$

$$P_D(M_3) = \frac{0,010}{0,029}$$

$$P_D(M_3) = \frac{10}{29} \approx 0,345$$

Constat : la machine M_3 produit deux fois moins de pièces que M_1 , mais elle est à l'origine d'autant de pièces défectueuses. Les trois probabilités ont pour somme $\frac{10 + 9 + 10}{29} = 1$.

Exercice 4 (★★) : événements indépendants ?

1. $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,7$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. $P(C) = 0,3$, $P(D) = 0,5$ et $P(C \cup D) = 0,75$. Les événements C et D sont-ils indépendants ?
3. $P(E) = 0,3$, $P(F) = 0,5$ et $E \cap F = \emptyset$. Les événements E et F sont-ils indépendants ?

Correction de l'exercice 4

Méthode

On calcule $P(A \cap B)$ avec $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, puis on compare à $P(A)P(B)$.

Question 1

$$P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,7 = 0,2 \text{ et } P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,4 = 0,2.$$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$: les événements A et B sont indépendants.

Question 2

$$P(C \cap D) = 0,3 + 0,5 - 0,75 = 0,05 \text{ et } P(C) \times P(D) = 0,3 \times 0,5 = 0,15.$$

$P(C \cap D) \neq P(C)P(D)$: les événements C et D ne sont pas indépendants.

Question 3

$$P(E \cap F) = 0 \text{ car } E \cap F = \emptyset, \text{ et } P(E) \times P(F) = 0,15 \neq 0.$$

Les événements E et F ne sont pas indépendants.

À retenir : deux événements de probabilité non nulle qui sont **incompatibles** ne sont **jamais** indépendants.

Exercice 5 (★★) : tirages sans remise

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules noires.

On tire successivement et **sans remise** deux boules.

On note R_1 (resp. R_2) l'événement « la première (resp. seconde) boule est rouge ».

1. Calculer $P(R_1 \cap R_2)$.
2. Calculer $P(R_2)$.
3. Calculer $P_{R_2}(R_1)$.
4. Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ?

Correction de l'exercice 5

Question 1

$P(R_1) = \frac{5}{8}$. Après une boule rouge tirée, il reste 4 rouges sur 7 boules : $P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7}$.

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$$

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{14}$$

Question 2

$(R_1, \overline{R_1})$ est une partition. Après une boule noire tirée, il reste 5 rouges sur 7 : $P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{5}{7}$.

$$P(R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{20 + 15}{56} = \frac{35}{56}$$

$$P(R_2) = \frac{5}{8}$$

Question 3

$$P_{R_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{20}{56}}{\frac{35}{56}}$$

$$P_{R_2}(R_1) = \frac{4}{7}$$

Question 4

$$P(R_1) \times P(R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64} \text{ alors que } P(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{14} = \frac{160}{448} \approx 0,357 \text{ et } \frac{25}{64} \approx 0,391.$$

$$\text{Ou encore : } P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7} \neq P(R_2) = \frac{5}{8}.$$

Les événements R_1 et R_2 ne sont pas indépendants (le tirage est sans remise).

Exercice 6 (★★★) : deux parties de suite

Un joueur dispute deux parties consécutives.

Il gagne la première avec la probabilité 0,6.

S'il a gagné la première, il gagne la seconde avec la probabilité 0,7 ; s'il a perdu la première, il gagne la seconde avec la probabilité 0,4.

On note G_1 et G_2 les événements « gagner la première (resp. seconde) partie ».

1. Calculer la probabilité de gagner la seconde partie.
2. Le joueur a gagné la seconde partie. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi gagné la première ?
3. Calculer la probabilité de gagner exactement une partie sur les deux.

Correction de l'exercice 6

Les données : $P(G_1) = 0,6$, $P_{G_1}(G_2) = 0,7$, $P_{\overline{G_1}}(G_2) = 0,4$.

Question 1

$(G_1, \overline{G_1})$ est une partition. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(G_2) = 0,6 \times 0,7 + 0,4 \times 0,4 = 0,42 + 0,16$$

$$P(G_2) = 0,58$$

Question 2

$$P_{G_2}(G_1) = \frac{P(G_1 \cap G_2)}{P(G_2)} = \frac{0,42}{0,58}$$

$$P_{G_2}(G_1) = \frac{21}{29} \approx 0,724$$

Question 3

« Exactement une partie gagnée » est la réunion des deux événements incompatibles $G_1 \cap \overline{G_2}$ et $\overline{G_1} \cap G_2$.

$$P(G_1 \cap \overline{G_2}) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$

$$P(\overline{G_1} \cap G_2) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$$

$$P(\text{exactement une}) = 0,18 + 0,16 = 0,34$$

Exercice 7 (★★★) : une propriété de l'indépendance

Soient A et B deux événements indépendants. Montrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Correction de l'exercice 7

Il faut montrer que $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$.

$(B, \overline{B})$ est une partition, donc $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$. Donc :

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

Comme A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Donc :

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$$

A et $\overline{B}$ sont indépendants. ■

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Pour tous événements A et B de probabilité non nulle, $P_A(B) = P_B(A)$.
2. Si A et B sont incompatibles et de probabilité non nulle, alors $P_A(B) = 0$.
3. $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.
4. Si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, alors $P_A(B) = P(B)$ (pour $P(A) \neq 0$).
5. Sur un arbre pondéré, la somme des probabilités de tous les chemins vaut 1.

Correction de l'exercice 8

Affirmation 1

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ et } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \text{ Elles sont égales seulement si } P(A) = P(B).$$

Dans l'exercice 1 : $P_B(A) = 0,7$ et $P_A(B) = 0,7$ (cas particulier), mais dans l'exercice 6 :

$$P_{G_2}(G_1) = \frac{21}{29} \neq P_{G_1}(G_2) = 0,7.$$

Faux.

Affirmation 2

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.$$

Vrai.

Affirmation 3

B et $\overline{B}$ sont complémentaires, donc $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$ (la probabilité conditionnelle sachant A est une probabilité).

Vrai.

Affirmation 4

$$\text{Si } P(A) \neq 0 : P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Vrai.

Affirmation 5

Les chemins d'un arbre décrivent tous les résultats possibles, deux à deux incompatibles. La somme de leurs probabilités est 1.

Vrai.**Ce qui peut tomber au bac**

- Un **arbre pondéré** et les probabilités composées (exercices 1 et 6).
- La **formule des probabilités totales** et l'**inversion** du conditionnement (exercices 2, 3, 6).
- L'**indépendance** de deux événements (exercices 4 et 7).
- Un **tirage sans remise** (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. La probabilité de B sachant A (avec $P(A) \neq 0$) vaut :

- A. $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (bonne réponse)
 B. $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
 C. $P(A) \times P(B)$
 D. $\frac{P(A)}{P(B)}$

Justification : C'est la définition de $P_A(B)$.

2. Si $P(A) = 0,4$ et $P_A(B) = 0,7$, que vaut $P(A \cap B)$?

- A. 0,28 (bonne réponse)
 B. 0,7
 C. 0,4
 D. 1,1

Justification : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,4 \times 0,7$.

3. Avec la partition $(A, \overline{A})$, la formule des probabilités totales donne $P(B) =$:

- A. $P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$ (bonne réponse)

- B. $P(A) + P(\overline{A})$
- C. $P_A(B) + P_{\overline{A}}(B)$
- D. $P(A)P(B)$

Justification : Somme des probabilités des chemins de l'arbre qui aboutissent à B .

4. Une maladie touche 2 % d'une population. Le test est positif chez 95 % des malades et chez 10 % des non-malades. Quelle est la probabilité que le test soit positif ?

- A. 0,117 (**bonne réponse**)
- B. 0,95
- C. 0,019
- D. 0,12

Justification : $0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,10 = 0,019 + 0,098$.

5. Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

- A. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- B. $P(A) = P(B)$
- C. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (**bonne réponse**)
- D. $A \cap B = \emptyset$

Justification : Indépendants ne veut pas dire incompatibles.

6. Dans l'exercice 2 (dépistage, maladie à 2 %, test positif chez 95 % des malades et 10 % des non-malades), quelle est la probabilité que le test soit positif ?

- A. 0,02
- B. 0,95
- C. 0,12
- D. 0,117 (**bonne réponse**)

Justification : $P(T) = P(M)P_M(T) + P(\overline{M})P_{\overline{M}}(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,10 = 0,117$.

7. Dans l'exercice 3 (trois machines), quelle est la probabilité qu'une pièce défectueuse vienne de la machine M_2 ?

- A. 0,3
- B. $\frac{9}{29}$ (**bonne réponse**)
- C. $\frac{10}{29}$
- D. $\frac{3}{29}$

Justification : $P_D(M_2) = \frac{P(M_2)P_{M_2}(D)}{P(D)} = \frac{0,3 \times 0,03}{0,029} = \frac{0,009}{0,029} = \frac{9}{29}$.

8. Dans l'exercice 5 (urne de 5 rouges, 3 noires, tirage sans remise de 2 boules), que vaut $P(R_2)$?

- A. $\frac{5}{14}$
- B. $\frac{3}{8}$
- C. $\frac{5}{8}$ (bonne réponse)
- D. $\frac{4}{7}$

Justification : Par la formule des probabilités totales : $P(R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{8}$ (même valeur que $P(R_1)$, résultat classique).

9. Dans l'exercice 6 (deux parties, $P(G_1) = 0,6$, $P_{G_1}(G_2) = 0,7$, $P_{\overline{G_1}}(G_2) = 0,4$), quelle est la probabilité de gagner exactement une partie sur les deux ?

- A. 0,16
- B. 0,34 (bonne réponse)
- C. 0,58
- D. 0,42

Justification : C'est la somme $P(G_1 \cap \overline{G_2}) + P(\overline{G_1} \cap G_2) = 0,18 + 0,16 = 0,34$.

10. Dans l'exercice 7, pour montrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants (avec A , B indépendants), on utilise :

- A. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$, avec $(B, \overline{B})$ partition (bonne réponse)
- B. Le théorème des valeurs intermédiaires
- C. Un dénombrement
- D. La formule du binôme

Justification : On exprime $P(A \cap \overline{B})$ à partir de $P(A)$ et $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ce qui donne $P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$.