

Contrôle : chapitre 12, Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

Durée : 60 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6,5 points) : Un filtre anti-spam

Une messagerie reçoit des courriels dont 30 % sont des spams. Un filtre examine chaque courriel reçu et le marque, ou non, comme « suspect ». Il marque 90 % des spams et 4 % des courriels légitimes.

On choisit un courriel au hasard parmi les courriels reçus. On note S l'événement « le courriel est un spam » et F l'événement « le courriel est marqué comme suspect ».

1. Traduire les données de l'énoncé en probabilités, puis calculer $P(S \cap F)$. (1 point)
2. Montrer que $P(F) = 0,298$. (1,5 points)
3. Un courriel est marqué comme suspect. Quelle est la probabilité que ce soit réellement un spam ? Arrondir au millième. (1,5 points)
4. Les événements S et F sont-ils indépendants ? Justifier. (1 point)
5. Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants. (1,5 points)

Exercice 2 (7 points) : Cartes à gratter

Un jeu en ligne vend des cartes à gratter virtuelles. Chaque carte est gagnante avec la probabilité 0,15, indépendamment des autres cartes. Une carte coûte 2 euros et chaque carte gagnante rapporte 10 euros. Un joueur achète 12 cartes. On note X le nombre de cartes gagnantes parmi les 12.

Dans cet exercice, les probabilités demandées sont à arrondir au millième, et la calculatrice peut être utilisée.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. (1 point)
2. Calculer la probabilité de n'obtenir aucune carte gagnante, puis celle d'obtenir exactement deux cartes gagnantes. (1,5 points)
3. Le joueur réalise un bénéfice strictement positif lorsque ses gains dépassent strictement sa dépense. Montrer que cela se produit si et seulement si $X \geq 3$, puis calculer la probabilité de cet événement. (1,5 points)
4. Calculer l'espérance et l'écart-type de X (arrondir l'écart-type au centième). (1 point)
5. Démontrer que, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 11$, $\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{12 - k}{k + 1} \times \frac{3}{17}$. En déduire la valeur de k pour laquelle $P(X = k)$ est maximale. (2 points)

Exercice 3 (6,5 points) : Stand de tir et tirages sans remise

Partie A. Dans une fête foraine, un stand de tir propose des tirs indépendants les uns des autres. À chaque tir, un joueur touche la cible avec la probabilité **0,35**. Un joueur effectue n tirs ($n \geq 1$) et on note X_n le nombre de tirs qui touchent la cible.

On donne le script Python suivant, utilisé à la troisième question de la partie A.

```
def seuil(p, a):
    n = 1
    while .....:
        n = .....
    return n

print(seuil(0.35, 0.99))
```

Partie B. Une urne contient 10 jetons indiscernables au toucher, dont 4 sont gagnants. On tire successivement et **sans remise** 3 jetons de l'urne. On note Y le nombre de jetons gagnants obtenus.

- (Partie A)** Justifier que X_n suit une loi binomiale, puis démontrer que la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois est $1 - 0,65^n$. (1,5 points)
- (Partie A)** Déterminer, en justifiant, le plus petit entier n tel que la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois soit supérieure ou égale à **0,99**. (2 points)
- (Partie A)** On donne ci-dessous une fonction Python destinée à renvoyer le plus petit entier n tel que $1 - (1 - p)^n \geq a$. Compléter les deux lignes en pointillés, puis indiquer la valeur affichée par l'instruction `print(seuil(0.35, 0.99))`. (1,5 points)
- (Partie B)** La variable aléatoire Y suit-elle la loi binomiale $\mathcal{B}(3; 0,4)$? Justifier en calculant la probabilité de tirer trois jetons gagnants. (1,5 points)