

Contrôle : chapitre 12, Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

Durée : 60 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6,5 points) : Un filtre anti-spam

Une messagerie reçoit des courriels dont 30 % sont des spams. Un filtre examine chaque courriel reçu et le marque, ou non, comme « suspect ». Il marque 90 % des spams et 4 % des courriels légitimes.

On choisit un courriel au hasard parmi les courriels reçus. On note S l'événement « le courriel est un spam » et F l'événement « le courriel est marqué comme suspect ».

1. Traduire les données de l'énoncé en probabilités, puis calculer $P(S \cap F)$. (1 point)
2. Montrer que $P(F) = 0,298$. (1,5 points)
3. Un courriel est marqué comme suspect. Quelle est la probabilité que ce soit réellement un spam ? Arrondir au millième. (1,5 points)
4. Les événements S et F sont-ils indépendants ? Justifier. (1 point)
5. Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants. (1,5 points)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1 point)

Les données s'écrivent : $P(S) = 0,3$, $P_S(F) = 0,9$ et $P_{\overline{S}}(F) = 0,04$. On en déduit $P(\overline{S}) = 1 - 0,3 = 0,7$.

D'après la formule des probabilités composées : $P(S \cap F) = P(S) \times P_S(F) = 0,3 \times 0,9 = 0,27$.

$P(S \cap F) = 0,27$.

Barème : 0,5 point pour les trois données traduites correctement (conditionnelles comprises) ; 0,5 point pour $P(S \cap F) = 0,27$ avec la formule citée.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1,5 points)

$(S, \bar{S})$ est une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(S \cap F) + P(\bar{S} \cap F) = P(S) P_S(F) + P(\bar{S}) P_{\bar{S}}(F) = 0,3 \times 0,9 + 0,7 \times 0,04 = 0,27 + 0,028.$$

$$P(F) = 0,298.$$

Barème : 0,5 point pour la partition $(S, \bar{S})$ citée et la formule des probabilités totales ; 0,5 point pour $P(\bar{S} \cap F) = 0,7 \times 0,04 = 0,028$; 0,5 point pour la somme 0,298.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (1,5 points)

$$\text{On cherche } P_F(S) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{0,27}{0,298} = \frac{135}{149}.$$

$P_F(S) \approx 0,906$: environ 90,6 % des courriels marqués comme suspects sont des spams.

Barème : 0,5 point pour la formule de la probabilité conditionnelle $P_F(S)$ (et non $P_S(F)$) ; 0,5 point pour le quotient $\frac{0,27}{0,298}$; 0,5 point pour la valeur arrondie et l'interprétation.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (1 point)

$$P(S) \times P(F) = 0,3 \times 0,298 = 0,0894 \text{ alors que } P(S \cap F) = 0,27.$$

$P(S \cap F) \neq P(S) \times P(F)$: les événements S et F ne sont **pas indépendants**.

(Cela traduit que le filtre fonctionne : savoir qu'un courriel est un spam change la probabilité qu'il soit marqué, $P_S(F) = 0,9 \neq P(F)$.)

Barème : 0,5 point pour le calcul de $P(S) \times P(F)$ comparé à $P(S \cap F)$; 0,5 point pour la conclusion.

Correction de l'exercice 1, question 5

Question 5 (1,5 points)

$(B, \overline{B})$ est une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :
 $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$.

Donc $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

Comme A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, d'où :

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}).$$

Donc A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Barème : 0,5 point pour $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ (partition justifiée) ; 0,5 point pour l'utilisation de l'indépendance de A et B ; 0,5 point pour la factorisation et la conclusion.

Exercice 2 (7 points) : Cartes à gratter

Un jeu en ligne vend des cartes à gratter virtuelles. Chaque carte est gagnante avec la probabilité 0,15, indépendamment des autres cartes. Une carte coûte 2 euros et chaque carte gagnante rapporte 10 euros. Un joueur achète 12 cartes. On note X le nombre de cartes gagnantes parmi les 12.

Dans cet exercice, les probabilités demandées sont à arrondir au millième, et la calculatrice peut être utilisée.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. (1 point)
2. Calculer la probabilité de n'obtenir aucune carte gagnante, puis celle d'obtenir exactement deux cartes gagnantes. (1,5 points)
3. Le joueur réalise un bénéfice strictement positif lorsque ses gains dépassent strictement sa dépense. Montrer que cela se produit si et seulement si $X \geq 3$, puis calculer la probabilité de cet événement. (1,5 points)
4. Calculer l'espérance et l'écart-type de X (arrondir l'écart-type au centième). (1 point)
5. Démontrer que, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 11$, $\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{12 - k}{k + 1} \times \frac{3}{17}$. En déduire la valeur de k pour laquelle $P(X = k)$ est maximale. (2 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (1 point)

On répète $n = 12$ fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,15$ (succès : « la carte est gagnante »). X est le nombre de succès.

Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(12; 0,15)$.

Barème : 0,5 point pour $n = 12$, $p = 0,15$ et le succès précisé ; 0,5 point pour épreuves identiques et indépendantes, puis la conclusion.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (1,5 points)

$$P(X = 0) = \binom{12}{0} \times 0,15^0 \times 0,85^{12} = 0,85^{12} \approx 0,142.$$

$$P(X = 2) = \binom{12}{2} \times 0,15^2 \times 0,85^{10} = 66 \times 0,0225 \times 0,85^{10} \approx 0,292.$$

$$P(X = 0) \approx 0,142 \text{ et } P(X = 2) \approx 0,292.$$

Barème : 0,5 point pour la formule $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ citée ; 0,5 point pour $P(X = 0) \approx 0,142$; 0,5 point pour $P(X = 2) \approx 0,292$ avec $\binom{12}{2} = 66$.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (1,5 points)

Le joueur dépense $12 \times 2 = 24$ euros et gagne $10X$ euros. Il réalise un bénéfice strictement positif si et seulement si $10X > 24$, soit $X > 2,4$.

Comme X est un entier, cela équivaut à $X \geq 3$.

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2))$, ce que la calculatrice donne directement avec la fonction de répartition (sans arrondir les valeurs intermédiaires, sinon l'arrondi final peut être faussé).

$P(X \geq 3) \approx 0,264$: le joueur est bénéficiaire avec une probabilité d'environ 26,4 %.

Barème : 0,5 point pour l'inéquation $10X > 24$ et l'équivalence avec $X \geq 3$ (entier) ; 0,5 point pour le passage au complémentaire $1 - P(X \leq 2)$; 0,5 point pour la valeur 0,264.

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (1 point)

$$E(X) = np = 12 \times 0,15 = 1,8.$$

$$V(X) = np(1 - p) = 12 \times 0,15 \times 0,85 = 1,53 \text{ donc } \sigma(X) = \sqrt{1,53} \approx 1,24.$$

En moyenne, on obtient 1,8 carte gagnante sur 12 ; $\sigma(X) \approx 1,24$.

Barème : 0,5 point pour $E(X) = 1,8$; 0,5 point pour $V(X) = 1,53$ et $\sigma(X) \approx 1,24$.

Correction de l'exercice 2, question 5

Question 5 (2 points)

Pour $0 \leq k \leq 11$, $P(X = k) > 0$ et :

$$\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{\binom{12}{k+1} 0,15^{k+1} 0,85^{11-k}}{\binom{12}{k} 0,15^k 0,85^{12-k}} = \frac{\binom{12}{k+1}}{\binom{12}{k}} \times \frac{0,15}{0,85}.$$

$$\text{Or } \frac{\binom{12}{k+1}}{\binom{12}{k}} = \frac{12!}{(k+1)!(11-k)!} \times \frac{k!(12-k)!}{12!} = \frac{12-k}{k+1} \text{ et } \frac{0,15}{0,85} = \frac{3}{17}.$$

$$\text{Donc } \frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{12-k}{k+1} \times \frac{3}{17}.$$

Ce rapport est strictement supérieur à 1 si et seulement si $3(12-k) > 17(k+1)$, soit $36 - 3k > 17k + 17$, soit $19 > 20k$, soit $k < \frac{19}{20}$, c'est-à-dire $k = 0$ (car k est entier). Pour $k \geq 1$, le rapport est strictement inférieur à 1 (l'égalité $20k = 19$ est impossible pour un entier k).

Ainsi $P(X = 0) < P(X = 1)$ puis $P(X = 1) > P(X = 2) > \dots > P(X = 12)$.

La probabilité $P(X = k)$ est maximale pour $k = 1$: le nombre de cartes gagnantes le plus probable est 1.

Barème : 0,5 point pour le quotient des deux probabilités écrit avec la formule du cours ; 0,5 point pour le quotient des coefficients binomiaux $\frac{12-k}{k+1}$ et $\frac{3}{17}$; 0,5 point pour l'étude du rapport par rapport à 1 ($k < \frac{19}{20}$) ; 0,5 point pour la conclusion $k = 1$.

Exercice 3 (6,5 points) : Stand de tir et tirages sans remise

Partie A. Dans une fête foraine, un stand de tir propose des tirs indépendants les uns des autres. À chaque tir, un joueur touche la cible avec la probabilité $0,35$. Un joueur effectue n tirs ($n \geq 1$) et on note X_n le nombre de tirs qui touchent la cible.

On donne le script Python suivant, utilisé à la troisième question de la partie A.

```
def seuil(p, a):
    n = 1
    while .....:
        n = .....
    return n

print(seuil(0.35, 0.99))
```

Partie B. Une urne contient 10 jetons indiscernables au toucher, dont 4 sont gagnants. On tire successivement et **sans remise** 3 jetons de l'urne. On note Y le nombre de jetons gagnants obtenus.

- (Partie A)** Justifier que X_n suit une loi binomiale, puis démontrer que la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois est $1 - 0,65^n$. (1,5 points)
- (Partie A)** Déterminer, en justifiant, le plus petit entier n tel que la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois soit supérieure ou égale à $0,99$. (2 points)
- (Partie A)** On donne ci-dessous une fonction Python destinée à renvoyer le plus petit entier n tel que $1 - (1 - p)^n \geq a$. Compléter les deux lignes en pointillés, puis indiquer la valeur affichée par l'instruction `print(seuil(0.35, 0.99))`. (1,5 points)
- (Partie B)** La variable aléatoire Y suit-elle la loi binomiale $\mathcal{B}(3; 0,4)$? Justifier en calculant la probabilité de tirer trois jetons gagnants. (1,5 points)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (1,5 points)

On répète n fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,35$ (succès : « le tir touche la cible »). Donc X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,35)$.

L'événement contraire de $\{X_n \geq 1\}$ est $\{X_n = 0\}$, et $P(X_n = 0) = \binom{n}{0} \times 0,35^0 \times 0,65^n = 0,65^n$.

$$P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - 0,65^n.$$

Barème : 0,5 point pour $X_n \sim \mathcal{B}(n; 0,35)$ justifiée ; 0,5 point pour $P(X_n = 0) = 0,65^n$; 0,5 point pour le passage au complémentaire.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (2 points)

$$P(X_n \geq 1) \geq 0,99 \iff 1 - 0,65^n \geq 0,99 \iff 0,65^n \leq 0,01.$$

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$: $0,65^n \leq 0,01 \iff n \ln(0,65) \leq \ln(0,01)$.

Comme $\ln(0,65) < 0$, on divise en renversant l'inégalité : $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,65)} \approx 10,69$.

Vérification : $1 - 0,65^{10} \approx 0,9865 < 0,99$ et $1 - 0,65^{11} \approx 0,9912 \geq 0,99$.

Il faut effectuer au moins $n = 11$ tirs.

Barème : 0,5 point pour la mise en inéquation $0,65^n \leq 0,01$; 0,5 point pour l'utilisation de $\ln$ et $\ln(0,65) < 0$; 0,5 point pour le renversement de l'inégalité et $n \geq 10,69$; 0,5 point pour la conclusion $n = 11$.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (1,5 points)

Tant que la probabilité d'obtenir au moins un succès est strictement inférieure à a , on augmente n de 1.

```
def seuil(p, a):
    n = 1
    while 1 - (1 - p)**n < a:
        n = n + 1
    return n

print(seuil(0.35, 0.99))
```

Le programme affiche 11, ce qui est cohérent avec la question précédente.

Barème : 0,5 point pour la condition $1 - (1 - p)**n < a$; 0,5 point pour l'incrément $n = n + 1$; 0,5 point pour la valeur affichée 11.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (1,5 points)

Un tirage sans remise modifie la composition de l'urne : les trois tirages ne sont pas indépendants et la probabilité d'un jeton gagnant change à chaque tirage.

Probabilité de tirer trois jetons gagnants (arbre, probabilités composées) : $P(Y = 3) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30} \approx 0,033$.

Si Y suivait $\mathcal{B}(3; 0,4)$, on aurait $P(Y = 3) = 0,4^3 = 0,064$.

Comme $\frac{1}{30} \neq 0,064$, la variable Y ne suit **pas** la loi $\mathcal{B}(3; 0,4)$.

Barème : 0,5 point pour l'explication : tirages non indépendants (sans remise) ; 0,5 point pour $P(Y = 3) = \frac{1}{30}$; 0,5 point pour la comparaison avec $0,4^3 = 0,064$ et la conclusion.

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	6,5
Exercice 2	7
Exercice 3	6,5
Total	20