

Orthogonalité et distances dans l'espace : le cours

Dans le chapitre précédent, on savait dire si deux droites se coupent ou si des points sont dans un même plan. Ici, on **mesure** : longueurs, angles, distances.

L'outil est le **produit scalaire**, que tu connais dans le plan : il fonctionne dans l'espace de la même façon. Et il apporte un cadeau : les **équations de plans**, bien plus pratiques que les bases de vecteurs pour trouver des intersections et des distances.

Ce chapitre répond à des questions très classiques du bac :

- ces deux droites sont-elles orthogonales ?
- quelle est l'équation du plan (ABC) ?
- quelle est la distance de ce point à ce plan ?
- où cette droite coupe-t-elle ce plan ?

Dans tout le cours, tu verras des astuces , des pièges et un peu d'humour .

Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Retiens le fil rouge du chapitre : **orthogonal $\iff$ produit scalaire nul**, et **un plan se décrit par un vecteur normal**.
- Le repère doit être **orthonormé** pour utiliser les formules de norme, de distance et d'angle : vérifie-le à chaque fois.

1. Le produit scalaire dans l'espace

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Les points A, B, C sont dans un même plan : on calcule le produit scalaire dans ce plan, comme en première.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \widehat{BAC}$$

Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.

Propriétés. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel λ :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$;
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

Orthogonalité. $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Projeté orthogonal. Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) , alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$. C'est $AB \times AH$ si $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens, et $-AB \times AH$ sinon.

2. Expression dans un repère orthonormé

Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormé** si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux. Pour $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

où $\theta \in [0; \pi]$ est l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Astuces :

- Pour montrer que ABC est **rectangle en A**, calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$: il doit être nul.
- Pour un **angle**, calcule le produit scalaire, les deux normes, puis $\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}\right)$ (mode degrés ou radians, selon la demande).
- Dans un **cube d'arête 1**, le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est orthonormé.

Pièges :

- Appliquer les formules avec un repère **non orthonormé**.
- Confondre $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (un **nombre**) avec un vecteur.
- Oublier la racine carrée dans une norme.
- Écrire $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|}$ (c'est un **produit** des normes).

Un repère non orthonormé, c'est une règle graduée en pouces sur un plan en centimètres : tout marche, sauf les résultats.

3. Orthogonalité de droites et de plans

- **Droites orthogonales** : leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Elles ne sont pas forcément sécantes (des droites non coplanaires peuvent être orthogonales).
- **Droites perpendiculaires** : orthogonales **et** sécantes.
- **Droite orthogonale à un plan** : orthogonale à toutes les droites du plan.

Théorème. Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à **deux droites sécantes** de ce plan. Autrement dit, si son vecteur directeur est orthogonal à deux vecteurs **non colinéaires** du plan.

Vecteur normal. Un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ est **normal** à un plan P s'il est orthogonal à tous les vecteurs de P . Il suffit qu'il soit orthogonal à **deux vecteurs non colinéaires** de P .

- Deux plans sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs normaux sont **colinéaires**.
- Deux plans sont **perpendiculaires** si et seulement si leurs vecteurs normaux sont **orthogonaux**.

4. Équation cartésienne d'un plan

Théorème. Dans un repère orthonormé, soit P le plan passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$. Alors :

$$M(x; y; z) \in P \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff ax + by + cz + d = 0$$

avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

Réciproque. Si $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Méthode : équation d'un plan.

1. Trouve un **vecteur normal** $\vec{n}(a; b; c)$.
2. Écris $ax + by + cz + d = 0$.
3. **Remplace** les coordonnées d'un point du plan pour trouver d .
4. **Vérifie** avec un autre point.

Plan défini par trois points A, B, C non alignés : on cherche $\vec{n}(a; b; c)$ avec $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. On obtient **deux équations à trois inconnues** : on fixe une valeur, par exemple $c = 1$, et on résout.

Plan médiateur de $[AB]$: l'ensemble des points M tels que $MA = MB$. C'est le plan passant par le milieu de $[AB]$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

5. Intersections

Droite et plan. Soit d de représentation paramétrique $x = x_A + ta, y = y_A + tb, z = z_A + tc$, et P d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$. On remplace x, y, z dans l'équation de P : on obtient une équation en t .

- **Une solution** : d et P sont **sécants** en un point (on reporte t dans la représentation paramétrique).
- **Aucune solution** ($0 \times t = k \neq 0$) : d est **strictement parallèle** à P .
- **Toutes les valeurs de t** ($0 = 0$) : d est **incluse** dans P .

Lien avec le produit scalaire : d est parallèle à P si et seulement si son vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$, c'est-à-dire $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

Deux plans sécants. Si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires, les plans sont sécants suivant une droite. On résout le système des deux équations en prenant une inconnue comme **paramètre** : on obtient une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

6. Projeté orthogonal et distances

Projeté orthogonal sur un plan. Le projeté orthogonal de M sur le plan P est l'unique point H de P tel que $\overrightarrow{MH}$ soit orthogonal à P , c'est-à-dire colinéaire à $\vec{n}$.

Calcul de H : on cherche $H = M + k\vec{n}$ avec $H \in P$: on remplace dans l'équation de P , on obtient k .

Projeté orthogonal sur une droite. Le projeté orthogonal de M sur la droite $d(A; \vec{u})$ est le point $H \in d$ tel que $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$. Avec $H = A + t\vec{u}$, on résout $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$ pour trouver t .

Distance. La distance de M à P (ou à la droite d) est MH . C'est la **plus courte distance** de M à un point de P : pour tout $N \in P$, $MN^2 = MH^2 + HN^2 \geq MH^2$.

Formule de la distance d'un point à un plan. Le plan P a pour équation $ax + by + cz + d = 0$. La distance du point $M_0(x_0; y_0; z_0)$ à P est :

$$d(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Astuce. Quand on te demande une distance à un plan, la formule est la plus rapide. Quand on te demande **aussi** le projeté orthogonal, calcule $H = M + k\vec{n}$: la distance est alors $|k| \times \|\vec{n}\|$, ce qui te donne un **contrôle** avec la formule.

7. Python

```
from math import sqrt, acos, degrees

def produit_scalaire(u, v):
    return u[0]*v[0] + u[1]*v[1] + u[2]*v[2]

def norme(u):
    return sqrt(produit_scalaire(u, u))

def angle(u, v):
    return degrees(acos(produit_scalaire(u, v) / (norme(u) * norme(v))))

def distance_plan(M, a, b, c, d):
    return abs(a*M[0] + b*M[1] + c*M[2] + d) / sqrt(a*a + b*b + c*c)
```

`angle((1,1,0), (0,1,1))` renvoie environ 60.0. Un test avec des valeurs simples permet de **vérifier** tes formules.

8. Les 10 pépites du chapitre

1. **Orthogonal** $\iff$ **produit scalaire nul**.
2. Les formules de norme, distance, angle exigent un repère **orthonormé**.
3. Une droite est orthogonale à un plan si elle l'est à **deux droites sécantes** du plan.
4. **Vecteur normal** $(a; b; c)$ $\iff$ équation $ax + by + cz + d = 0$.
5. Pour trouver d : **remplace un point** du plan, puis **vérifie** avec un autre.
6. Plan par trois points : $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$, **fixe une inconnue**.
7. Droite et plan : **remplace** la représentation paramétrique dans l'équation, résous en t .
8. Deux plans sécants : **prends une inconnue comme paramètre**.
9. Projeté sur un plan : $H = M + k\vec{n}$ avec $H \in P$.
10. Distance à un plan : **formule** ou MH , et **contrôle** l'un par l'autre.

Complément du programme : la sphère

Définition. La **sphère** de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon r est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\Omega M = r$, soit

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Plan tangent. Si A est un point de la sphère, le **plan tangent** en A est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$:

$$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

Intersection d'une sphère et d'un plan. On note d la distance du centre Ω au plan :

- $d < r$: l'intersection est un **cercle** de rayon $\sqrt{r^2 - d^2}$, de centre le projeté orthogonal de Ω sur le plan ;
- $d = r$: le plan est **tangent**, un seul point commun ;
- $d > r$: **aucun** point commun.

Exemple. Sphère de centre $\Omega(1; 2; 3)$ et de rayon 3 : $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$. Le plan $z = 1$ est à la distance $d = 2$ de Ω . L'intersection est le cercle de centre $(1; 2; 1)$ et de rayon $\sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$.

Intersection d'une sphère et d'une droite. On remplace les coordonnées paramétriques de la droite dans l'équation de la sphère et on résout une équation du second degré en t : deux solutions, une solution (tangente) ou aucune.

Démonstration : le projeté orthogonal est le point le plus proche

Le programme demande de savoir **démontrer** que la distance d'un point A à un plan $\mathcal{P}$ est bien la plus courte des distances de A aux points de $\mathcal{P}$.

Propriété. Soit H le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$. Pour tout point M de $\mathcal{P}$, $AM \geq AH$, avec égalité si et seulement si $M = H$.

Démonstration. La droite (AH) est orthogonale à $\mathcal{P}$, donc $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{HM}$ car $\overrightarrow{HM}$ est dans la direction de $\mathcal{P}$. Le triangle AHM est rectangle en H (ou aplati si $M = H$) et le théorème de Pythagore donne :

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 \geq AH^2.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $HM = 0$, c'est-à-dire $M = H$. $\square$

Astuce. Même preuve pour une droite : le projeté orthogonal d'un point sur une droite est le point de la droite le plus proche. C'est ce qui justifie l'expression « distance **minimale** ».

9. Ce qui peut tomber au bac

- Des **produits scalaires**, normes, angles et orthogonalités (fiche 1).
- Des **équations de plans** : vecteur normal, trois points, plans parallèles ou perpendiculaires (fiche 2).
- Des **intersections**, **projetés orthogonaux** et **distances** (fiche 3).

- Des **problèmes de solides** : cube, tétraèdre, pyramide, volumes, avec Python (fiche 4 et exercices type bac).

Tu as maintenant le cours. Passe aux quatre fiches, aux exercices type bac, puis au Guide de rédaction du chapitre.