

Orthogonalité et distances dans l'espace : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac :

- un cube, le plan (BDG) , une droite orthogonale, une distance et un volume ;
- une pyramide régulière, le plan (SBC) , le projeté orthogonal du point A , une aire et un volume ;
- deux plans avec un paramètre : perpendicularité, droite d'intersection, projeté et distance.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac :

- repère orthonormé déclaré ;
- vecteur normal justifié par deux produits scalaires nuls ;
- équation de plan **vérifiée** avec ses points ;
- projeté orthogonal et distance **recoupés** ;
- conclusion en valeur exacte puis approchée.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Commence par écrire **les coordonnées de tous les points** de l'énoncé.
- Pour chaque plan, fais **deux vérifications** : le vecteur normal (produits scalaires nuls) et l'équation (points du plan).
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : un cube et le plan (BDG)

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1. On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des points B , D , E , C et G .
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; 1; -1)$ est normal au plan (BDG) . En déduire une équation cartésienne de (BDG) .
3. Montrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (BDG) et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection K .
4. Calculer la distance du point E au plan (BDG) .
5. Le triangle BDG est équilatéral de côté $\sqrt{2}$. En déduire le volume du tétraèdre $EBDG$.

Exercice 2 : une pyramide régulière

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère la pyramide $SABCD$ de base carrée $ABCD$ avec $A(0; 0; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(4; 4; 0)$, $D(0; 4; 0)$ et de sommet $S(2; 2; 4)$.

1. Montrer que le vecteur $\vec{n}(2; 0; 1)$ est normal au plan (SBC) . En déduire une équation de ce plan.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (SBC) .
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur (SBC) et calculer AH .
4. Calculer l'aire du triangle SBC , puis le volume du tétraèdre $ASBC$. Vérifier avec la base ABC .
5. Vérifier la valeur de AH avec la fonction `distance_plan` du cours.

Exercice 3 : deux plans, un paramètre

L'espace est muni d'un repère orthonormé. Pour tout réel m , on considère le plan P_m d'équation $x + my + z - 1 = 0$, et le plan Q d'équation $2x - y + z = 0$.

1. Déterminer m pour que P_m et Q soient perpendiculaires.
2. Pour cette valeur de m , montrer que P_m et Q sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection Δ .
3. Vérifier que le vecteur directeur de Δ est orthogonal aux vecteurs normaux des deux plans.
4. Déterminer le projeté orthogonal H du point $A(1; 1; 1)$ sur Q , puis la distance de A à Q .

Les réflexes à retenir

- Un **vecteur normal** se justifie par **deux produits scalaires nuls** avec deux vecteurs non colinéaires du plan.
- Une **équation de plan** se vérifie avec **tous** ses points.
- Une **droite orthogonale à un plan** a pour vecteur directeur un vecteur normal du plan.
- Le **projeté orthogonal** se calcule par $H = M + k\vec{n}$ et $H \in P$; la **distance** se recoupe avec la formule.
- Un **volume** de tétraèdre : $\frac{1}{3} \times \text{base} \times \text{hauteur}$, avec une **hauteur** qui est une distance à un plan.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les exercices de géométrie dans l'espace des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.