

Guide de rédaction : orthogonalité et distances dans l'espace

Ce guide complète le Guide de rédaction général. Il rassemble, pour le chapitre Orthogonalité et distances dans l'espace, **les quatorze situations qui reviennent au bac** et, pour chacune, la rédaction modèle.

Dans ce chapitre, un correcteur cherche des **étapes précises** : le repère orthonormé, le vecteur normal justifié, l'équation vérifiée, le projeté qui appartient au plan, la distance recoupée.

Le principe du chapitre

Avec l'orthogonalité et les distances, un correcteur regarde surtout **cinq choses** :

- le **repère orthonormé** déclaré avant d'utiliser une formule ;
- le **vecteur normal justifié** par deux produits scalaires nuls avec deux vecteurs non colinéaires ;
- l'**équation de plan** calculée puis vérifiée ;
- le **projeté** dont on prouve qu'il est dans le plan et que $\overrightarrow{MH}$ est normal ;
- la **distance** donnée en valeur exacte, recoupée par la formule.

1. Les quatorze situations et leur rédaction modèle

Situation 1 : un produit scalaire en coordonnées.

« Dans le repère orthonormé, $\vec{u}(1; 2; 3)$ et $\vec{v}(4; -1; 0)$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 4 + 2 \times (-1) + 3 \times 0 = 2$. »

Dis que le repère est **orthonormé** avant d'utiliser $xx' + yy' + zz'$.

Situation 2 : une norme, une distance.

« $\overrightarrow{AB}(2; -1; -1)$. $AB = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$. »

N'oublie pas la **racine carrée**, et les carrés des **différences** de coordonnées.

Situation 3 : un angle.

« $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1$, $AB = AC = \sqrt{6}$. Donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{-1}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = -\frac{1}{6}$. Comme $\widehat{BAC} \in [0; \pi]$, $\widehat{BAC} = \arccos\left(-\frac{1}{6}\right) \approx 99,6^\circ$. »

Situation 4 : deux vecteurs ou deux droites orthogonaux.

« $\vec{p} \cdot \vec{q} = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + 3 \times 0 = 0$. Donc $\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont orthogonaux. »

Pour des droites : « les vecteurs directeurs sont orthogonaux, donc les droites sont **orthogonales**. » Ajoute « perpendiculaires » **seulement** si tu as montré qu'elles sont sécantes.

Situation 5 : un triangle rectangle.

« $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$: le triangle ABC est rectangle en A . »

Situation 6 : une droite orthogonale à un plan.

« $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$. Les droites (BD) et (BE) sont sécantes en B et contenues dans le plan (BDE) . Donc (AG) est orthogonale au plan (BDE) . »

Deux orthogonalités **avec deux droites sécantes** : une seule ne suffit pas.

Situation 7 : justifier un vecteur normal.

« $\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{BG}(0; 1; 1)$ ne sont pas colinéaires. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$. Donc $\vec{n}(1; 1; -1)$ est normal au plan (BDG) . »

Situation 8 : équation de plan avec un vecteur normal.

« Le plan a pour vecteur normal $\vec{n}(1; 1; -1)$: une équation est $x + y - z + d = 0$. $B(1; 0; 0)$ est dans le plan, donc $1 + d = 0$ et $d = -1$. Une équation est $x + y - z - 1 = 0$. Vérification : $D(0; 1; 0) : 1 - 1 = 0$; $G(1; 1; 1) : 1 + 1 - 1 - 1 = 0$. »

Vérifie avec les autres points, et écris la vérification.

Situation 9 : plan défini par trois points.

« $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On cherche $\vec{n}(a; b; c)$ tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$: $a + b - 2c = 0$ et $-a + 3b - c = 0$. On choisit $c = 4$: $b = 3$, $a = 5$. Donc $\vec{n}(5; 3; 4)$. Puis $5x + 3y + 4z + d = 0$ et $A \in \text{plan}$ donne $d = -13$. »

Situation 10 : plans parallèles ou perpendiculaires.

« $\vec{n}_3(4; 2; -2) = 2\vec{n}_1$: les vecteurs normaux sont colinéaires, donc les plans sont parallèles. Le point $(0; 0; 1)$ est dans P_1 mais pas dans P_3 : ils sont strictement parallèles. »

Perpendiculaires : « $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, donc les plans sont perpendiculaires. »

Situation 11 : intersection d'une droite et d'un plan.

« On remplace $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 2 - t$ dans $2x - y + z - 3 = 0$: $2 + 2t - 2t + 2 - t - 3 = 0$, soit $1 - t = 0$ et $t = 1$. La droite coupe le plan au point $(2; 2; 1)$. »

Si $0 = k \neq 0$: « strictement parallèle. » Si $0 = 0$: « la droite est incluse dans le plan. »

Reporte t dans la représentation paramétrique pour donner le point.

Situation 12 : intersection de deux plans.

« Les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires : les plans sont sécants suivant une droite. On résout $x + y + z = 3$ et $x - y + 2z = 2$: $x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}z$ et $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z$. Avec $z = 2s$: $x = \frac{5}{2} - 3s$, $y = \frac{1}{2} + s$, $z = 2s$. »

Vérifie dans les deux équations.

Situation 13 : projeté orthogonal et distance.

« Le plan a pour vecteur normal $\vec{n}(2; -2; 1)$.

On pose $H = A + k\vec{n}$.

Comme $H \in P$, on obtient $9k - 1 = 0$, donc $k = \frac{1}{9}$ et $H\left(\frac{20}{9}; \frac{25}{9}; \frac{37}{9}\right)$. $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$ est normal à P : H est le projeté orthogonal de A sur P .

La distance est $AH = |k| \|\vec{n}\| = \frac{1}{3}$.

Contrôle avec la formule : $\frac{|-1|}{3} = \frac{1}{3}$. »

Situation 14 : volume d'un tétraèdre.

« La base BDG est un triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$, d'aire $\frac{\sqrt{3}}{2}$. La hauteur issue de E est la distance de E au plan (BDG) , soit $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Donc $V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$. »

Le volume est le tiers de « base $\times$ hauteur », et la **hauteur** est une distance au **plan de la base**.

2. Avant / après sur l'orthogonalité et les distances

a) Un vecteur normal.

« $\vec{n}(1;1;-1)$ est normal au plan car on le voit sur la figure. »

« $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$, avec $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BG}$ non colinéaires. Donc $\vec{n}$ est normal au plan (BDG) . »

b) Une distance.

« $d = \frac{2 \times 2 - 2 \times 3 + 4 - 3}{3} = -\frac{1}{3}$. »

« $d = \frac{|2 \times 2 - 2 \times 3 + 4 - 3|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|-1|}{3} = \frac{1}{3}$. »

La première a oublié la **valeur absolue** : une distance est positive.

c) Une intersection.

« La droite coupe le plan pour $t = 1$. »

« On remplace dans l'équation du plan : $1 - t = 0$, donc $t = 1$. On reporte : la droite coupe le plan au point $(2; 2; 1)$. »

d) Une orthogonalité.

« (AB) et (CG) sont orthogonales donc perpendiculaires. »

« $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$: les droites sont orthogonales. Elles ne sont pas sécantes (non coplanaires) : elles ne sont pas perpendiculaires. »

3. Les erreurs de rédaction propres à ce chapitre

- Appliquer les formules **sans avoir dit** que le repère est orthonormé.
- Justifier un vecteur normal avec **un seul** produit scalaire nul.
- Oublier de **vérifier** l'équation d'un plan avec ses points.
- Se tromper de signe dans $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.
- Oublier la **valeur absolue** ou la **racine** dans la formule de distance.
- Conclure « incluse » ou « parallèle » sans avoir obtenu $0 = 0$ ou $0 = k \neq 0$.
- Confondre **orthogonales** et **perpendiculaires**.
- Un volume **sans le facteur** $\frac{1}{3}$, ou avec une hauteur qui n'est pas une distance au plan de la base.

4. La check-list du chapitre

- J'ai précisé que le repère est **orthonormé**.
- Mon **vecteur normal** est justifié par **deux produits scalaires nuls**, avec deux vecteurs non colinéaires.
- Mon **équation de plan** est **vérifiée** avec les points donnés.
- Pour une **intersection**, j'ai remplacé dans l'équation, résolu, et **reporté t** pour donner le point.
- Pour un **projeté**, j'ai écrit $H = M + k\vec{n}$, $H \in P$, et calculé k .
- Ma **distance** est donnée en valeur exacte, avec la **valeur absolue** et la **racine**, et recoupée avec l'autre méthode.
- Pour un **volume**, j'ai écrit $\frac{1}{3} \times \text{base} \times \text{hauteur}$, avec une hauteur qui est une **distance au plan de la base**.
- Ma **conclusion** nomme la propriété (orthogonale, sécants, parallèles, incluse).

Une distance négative, ça n'existe pas : si tu en trouves une, tu as oublié la valeur absolue, ou tu es dans un autre univers.