

Orthogonalité et distances dans l'espace

Fiche Standard

Nom : _____

Date : _____

Sauf mention contraire, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice S1 : Un tétraèdre et son plan de face

On considère les points $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 2)$.

1. Montrer que $\vec{n}(1; 1; 2)$ est normal au plan (ABC) , puis déterminer une équation cartésienne de ce plan.
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de O sur le plan (ABC) , puis calculer la distance OH .
3. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$ en prenant pour base le triangle OAB .
4. a) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, puis $\cos \widehat{BAC}$ et $\sin \widehat{BAC}$ (on rappelle que $\sin \widehat{BAC} > 0$).
 b) En déduire l'aire du triangle ABC .
 c) Retrouver cette aire à l'aide du volume de la question 3 et de la distance OH .

Exercice S2 : Une famille de plans

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - y + z - 4 = 0$. Pour tout réel m , on note $\mathcal{Q}_m$ l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $mx - y + z + m = 0$.

1. Justifier que, pour tout réel m , $\mathcal{Q}_m$ est un plan et donner un vecteur normal.
2. Déterminer m pour que $\mathcal{Q}_m$ soit perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
3. Déterminer m pour que $\mathcal{Q}_m$ soit parallèle à $\mathcal{P}$. Les plans sont-ils confondus? Calculer la distance entre ces deux plans.
4. Pour $m = -1$, déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_{-1}$.
5. Soit Δ la droite de représentation paramétrique $x = -1, y = t, z = t$ ($t \in \mathbb{R}$).
 a) Montrer que Δ est contenue dans $\mathcal{Q}_m$ pour tout réel m .
 b) La droite Δ coupe-t-elle $\mathcal{P}$?

Exercice S3 : Un pavé droit

$ABCDEFGH$ est un pavé droit tel que $ABCD$ est un carré de côté 2 et $AE = 1$ ($[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont les arêtes verticales). On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{AD}$, $\vec{k} = \vec{AE}$.

1. Donner les coordonnées des huit sommets du pavé.
2. Montrer que $AG = BH = 3$, puis calculer le cosinus de l'angle $(\widehat{AG, BH})$ et donner une valeur approchée de cet angle en degrés, à 0,1 degré près.
3. Montrer que $\vec{n}(1; 1; -2)$ est normal au plan (BDG) , puis déterminer une équation de ce plan.
4. La droite (EC) est-elle orthogonale au plan (BDG) ? Déterminer les coordonnées de son point d'intersection K avec ce plan.
5. a) Calculer le volume du tétraèdre $ABDG$ en prenant pour base le triangle ABD .
 b) Calculer BD , BG , DG , puis l'aire du triangle BDG (on pourra utiliser le milieu de $[BD]$).
 c) En déduire la distance du point A au plan (BDG) , puis la retrouver avec la formule du cours.

Exercice S4 : Point d'une droite le plus proche d'un point donné

On considère la droite d passant par $A(1; 2; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 2)$, et le point $M(4; 5; -1)$. Pour tout réel t , on note N_t le point de d défini par $\overrightarrow{AN_t} = t\vec{u}$.

1. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}$.
2. Montrer que $MN_t^2 = 9t^2 - 6t + 18$, puis que $MN_t^2 = 9\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 17$.
3. En déduire que la distance de M à d vaut $\sqrt{17}$, et préciser la valeur de t pour laquelle elle est atteinte.

4. Soit $H = N_{1/3}$. Donner ses coordonnées et vérifier que $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$. Que représente H pour M ?

Exercice S5 : Points équidistants et plans médiateurs

On considère les points $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; 2)$, $C(1; 0; -2)$ et $D(3; 4; 0)$.

- Montrer que les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires (on pourra montrer que $\overrightarrow{AD}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$).
- Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur $\mathcal{P}_1$ de $[AB]$, puis de $\mathcal{P}_2$ de $[AC]$, puis de $\mathcal{P}_3$ de $[AD]$.
- Montrer que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est la droite de représentation paramétrique $x = 2 + 2s, y = s, z = -s$ ($s \in \mathbb{R}$).
- En déduire qu'il existe un unique point Ω équidistant de A, B, C, D . Donner ses coordonnées et la valeur commune ΩA .

Exercice S6 : Python : droite et plan

Le programme suivant étudie l'intersection de la droite passant par A et de vecteur directeur u avec le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

```
from math import sqrt

def etude(A, u, a, b, c, d):
    num = a*A[0] + b*A[1] + c*A[2] + d
    den = a*u[0] + b*u[1] + c*u[2]
    if den != 0:
        t = -num/den
        return "secante", (A[0]+t*u[0], A[1]+t*u[1], A[2]+t*u[2])
    elif num == 0:
        return "incluse", None
    else:
        return "parallele", None

def distance_plan(M, a, b, c, d):
    return abs(a*M[0] + b*M[1] + c*M[2] + d) / sqrt(a*a + b*b + c*c)
```

- Pour le point $M = A + t\vec{u}$, exprimer l'équation du plan en fonction de `num`, `den` et t . En déduire le rôle de chacune des trois branches du programme.
- Calculer à la main le résultat de `etude((1,0,2), (2,1,-1), 1, 2, 3, -5)`, puis vérifier que le point obtenu appartient au plan.
- Quels sont les résultats des deux appels suivants ? Justifier par le calcul.

```
etude((1,2,0), (2,-1,0), 1, 2, 3, -5)
etude((0,0,0), (3,0,-1), 1, 2, 3, -5)
```

- Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-3} près, de l'appel `distance_plan((1,0,2), 1, 2, 3, -5)`. Que renverrait cette fonction avec le point d'intersection trouvé à la question 2 ?

Exercice S7 : Une pyramide régulière

On considère les points $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(-2; 0; 0)$, $D(0; -2; 0)$ et $S(0; 0; 2)$.

- Montrer que $ABCD$ est un carré de centre O , et que $SA = SB = SC = SD = AB$. Que peut-on dire des faces latérales ?
- Montrer que $\vec{n}(1; 1; 1)$ est normal au plan (SAB) et en déduire une équation de ce plan.
- Calculer la distance de O au plan (SAB) . Calculer l'aire du triangle SAB .
- En déduire le volume du tétraèdre $OSAB$, puis le retrouver avec une autre base. Quel est le volume de la pyramide $SABCD$?

5. Déterminer le projeté orthogonal H du point C sur le plan (SAB) et la distance CH .

Exercice S8 : Le plus court chemin avec un rebond

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + 2y - 2z + 3 = 0$. On donne $M(0; 2; -1)$ et $B(-4; 2; -3)$.

1. Calculer $x + 2y - 2z + 3$ pour M et pour B . Que peut-on en conclure sur la position de M et B par rapport au plan ?
2. Déterminer le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{P}$, puis le point M' symétrique de M par rapport à $\mathcal{P}$ (c'est-à-dire tel que H soit le milieu de $[MM']$).
3. Montrer que, pour tout point N de $\mathcal{P}$, $NM = NM'$.
4. Déterminer le point I où la droite $(M'B)$ coupe $\mathcal{P}$.
5. Montrer que, pour tout point N de $\mathcal{P}$, $NM + NB \geq M'B$, avec égalité pour $N = I$. Calculer la valeur minimale de $NM + NB$.

Exercice S9 : Un ensemble de points et un plan

On donne $A(1; 2; 3)$ et $B(3; 0; 1)$. On note Ω le milieu de $[AB]$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

1. Pour $M(x; y; z)$, montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 - 3$.
2. En déduire que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = \sqrt{3}$.
3. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - y + 2z - 4 = 0$. Calculer la distance de Ω à $\mathcal{P}$ et déterminer le projeté orthogonal H de Ω sur $\mathcal{P}$.
4. Soit M un point de $\mathcal{P}$. Exprimer ΩM^2 en fonction de HM^2 . En déduire que $\mathcal{E} \cap \mathcal{P}$ est le cercle de $\mathcal{P}$ de centre H et de rayon $\sqrt{2}$.