

Corrigé : Orthogonalité et distances dans l'espace

Fiche Standard

S1.

1. $\overrightarrow{AB}(-4; 4; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-4; 0; 2)$ ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée de $\overrightarrow{AC}$ est nulle, pas celle de $\overrightarrow{AB}$). De plus

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -4 + 4 + 0 = 0, \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 + 0 + 4 = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il est normal à ce plan. Une équation est $x + y + 2z + d = 0$, et $A \in (ABC)$ donne $4 + d = 0$.

Conclusion : $(ABC) : x + y + 2z - 4 = 0$. Vérification : $B : 4 - 4 = 0$; $C : 4 - 4 = 0$.

2. $H = O + k\vec{n} = (k; k; 2k)$. Comme $H \in (ABC) : k + k + 4k - 4 = 0$, soit $k = \frac{2}{3}$.

Conclusion : $H\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ et $OH = |k| \|\vec{n}\| = \frac{2}{3}\sqrt{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Contrôle avec la formule : $\frac{|-4|}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

3. Le triangle OAB est rectangle en O d'aire $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$. La droite (OC) est orthogonale au plan (OAB) (axe (Oz) et plan (Oxy)), donc la hauteur issue de C est $OC = 2$.

Conclusion : $V = \frac{1}{3} \times 8 \times 2 = \frac{16}{3}$.

4. a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16 + 0 + 0 = 16$, $AB = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Donc

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{16}{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{5}} = \frac{16}{8\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}, \quad \cos^2 \widehat{BAC} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Comme $\sin^2 + \cos^2 = 1$ et $\sin \widehat{BAC} > 0 : \sin \widehat{BAC} = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

- b) L'aire est $\frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{\frac{3}{5}} = 4\sqrt{10} \times \sqrt{\frac{3}{5}} = 4\sqrt{6}$.

- c) Le volume vaut aussi $\frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ABC) \times OH$, donc

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{3V}{OH} = \frac{16}{\frac{2\sqrt{6}}{3}} = \frac{24}{\sqrt{6}} = 4\sqrt{6}.$$

Conclusion : $\mathcal{A}(ABC) = 4\sqrt{6}$, valeur obtenue de deux façons.

S2.

1. Le triplet $(m; -1; 1)$ n'est jamais nul (sa deuxième coordonnée vaut -1) : $\mathcal{Q}_m$ est un plan, de vecteur normal $\vec{n}_m(m; -1; 1)$.

2. $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(2; -1; 1)$. Les plans sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n}_m = 0$, soit $2m + 1 + 1 = 0$.

Conclusion : $m = -1$.

3. Les plans sont parallèles si et seulement si $\vec{n}_m = \lambda \vec{n}$. La deuxième coordonnée donne $-1 = -\lambda$, donc $\lambda = 1$ et $m = 2$ (la troisième coordonnée $1 = \lambda$ est cohérente).

Pour $m = 2 : \mathcal{Q}_2 : 2x - y + z + 2 = 0$. Le point $(2; 0; 0)$ appartient à $\mathcal{P}$ ($4 - 4 = 0$) mais pas à $\mathcal{Q}_2$ ($4 + 2 = 6 \neq 0$) : les plans ne sont pas confondus.

Conclusion : $\mathcal{Q}_2$ et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles, à la distance $d((2; 0; 0), \mathcal{Q}_2) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

4. $\mathcal{Q}_{-1} : -x - y + z - 1 = 0$. Le système $2x - y + z = 4$, $-x - y + z = 1$ donne, par soustraction, $3x = 3$, donc $x = 1$, puis $z = y + 2$. En prenant $y = t$:

Conclusion : $x = 1$, $y = t$, $z = t + 2$ ($t \in \mathbb{R}$). Vérification dans $\mathcal{P} : 2 - t + t + 2 - 4 = 0$.

5. a) Pour $M(-1; t; t) : m \times (-1) - t + t + m = 0$ pour tout m et tout t . Donc $\Delta \subset \mathcal{Q}_m$.

- b) Dans l'équation de $\mathcal{P}$: $-2 - t + t - 4 = -6 \neq 0$ pour tout t . Donc Δ ne coupe pas $\mathcal{P}$: elle lui est strictement parallèle (son vecteur directeur $(0; 1; 1)$ est orthogonal à $\vec{n}$: $0 - 1 + 1 = 0$).

S3.

1. $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(2; 2; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $F(2; 0; 1)$, $G(2; 2; 1)$, $H(0; 2; 1)$.
2. $\overrightarrow{AG}(2; 2; 1)$ et $\overrightarrow{BH}(-2; 2; 1)$: $AG = BH = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = -4 + 4 + 1 = 1$, donc

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BH}}) = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}.$$

Conclusion : l'angle vaut $\arccos \frac{1}{9} \approx 83,6^\circ$.

3. $\overrightarrow{BD}(-2; 2; 0)$ et $\overrightarrow{BG}(0; 2; 1)$ ne sont pas colinéaires. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = -2 + 2 + 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 + 2 - 2 = 0$: $\vec{n}$ est normal à (BDG) . Une équation est $x + y - 2z + d = 0$ et $B \in (BDG)$ donne $2 + d = 0$.

Conclusion : (BDG) : $x + y - 2z - 2 = 0$. Vérification : D : $2 - 2 = 0$; G : $2 + 2 - 2 - 2 = 0$.

4. $\overrightarrow{EC}(2; 2; -1)$. Si $\overrightarrow{EC} = \lambda \vec{n}$, alors $\lambda = 2$ par la première coordonnée, mais $-1 \neq -4$: $\overrightarrow{EC}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires. Donc (EC) n'est pas orthogonale à (BDG) .

Représentation de (EC) : $x = 2t$, $y = 2t$, $z = 1 - t$. Dans l'équation du plan : $2t + 2t - 2(1 - t) - 2 = 6t - 4 = 0$, donc $t = \frac{2}{3}$.

Conclusion : $K\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Vérification : $\frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} - 2 = 0$.

5. a) Le triangle ABD est rectangle en A d'aire $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$. La droite (CG) est orthogonale au plan (ABD) et C appartient à ce plan : la hauteur issue de G est $CG = 1$. Donc $V = \frac{1}{3} \times 2 \times 1 = \frac{2}{3}$.

- b) $BD = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $BG = \sqrt{0 + 4 + 1} = \sqrt{5}$, $DG = \sqrt{4 + 0 + 1} = \sqrt{5}$: le triangle BDG est isocèle en G . Le milieu de $[BD]$ est $I(1; 1; 0)$ et $GI = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$. La médiane $[GI]$ est une hauteur, donc l'aire vaut $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

- c) Le volume vaut aussi $\frac{1}{3} \times \mathcal{A}(BDG) \times d(A, (BDG))$, d'où

$$d(A, (BDG)) = \frac{3V}{\mathcal{A}(BDG)} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Avec la formule du cours : $\frac{|0 + 0 - 0 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Conclusion : $d(A, (BDG)) = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,82$.

S4.

1. $\|\vec{u}\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$. $\overrightarrow{AM}(3; 3; 0)$, donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 6 - 3 + 0 = 3$ et $AM^2 = 18$.
2. $\overrightarrow{N_t M} = \overrightarrow{AM} - t\vec{u}$, donc

$$MN_t^2 = \|\overrightarrow{AM} - t\vec{u}\|^2 = AM^2 - 2t \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} + t^2 \|\vec{u}\|^2 = 18 - 6t + 9t^2.$$

Or $9\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 17 = 9t^2 - 6t + 1 + 17 = 9t^2 - 6t + 18$.

3. Pour tout t , $MN_t^2 \geq 17$, avec égalité si et seulement si $t = \frac{1}{3}$.

Conclusion : la distance de M à d est $\sqrt{17}$, atteinte pour $t = \frac{1}{3}$.

4. $H\left(1 + \frac{2}{3}; 2 - \frac{1}{3}; -1 + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. $\overrightarrow{MH}\left(-\frac{7}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right)$ et $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = -\frac{14}{3} + \frac{10}{3} + \frac{4}{3} = 0$. De plus $MH^2 = \frac{49 + 100 + 4}{9} = 17$.

Conclusion : H est le projeté orthogonal de M sur d , et $MH = \sqrt{17}$.

S5.

1. $\overrightarrow{AB}(2; -2; 2)$, $\overrightarrow{AC}(0; -2; -2)$, $\overrightarrow{AD}(2; 2; 0)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Supposons $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$. La première coordonnée donne $2 = 2\alpha$, donc $\alpha = 1$; la deuxième donne $2 = -2 - 2\beta$, donc $\beta = -2$; la troisième donne alors $0 = 2\alpha - 2\beta = 6$, ce qui est impossible.
Conclusion : A, B, C, D ne sont pas coplanaires.
2. Le plan médiateur de $[AB]$ passe par le milieu $(2; 1; 1)$ et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$, colinéaire à $(1; -1; 1) : x - y + z + d = 0$ avec $2 - 1 + 1 + d = 0$.
 $\mathcal{P}_1 : x - y + z - 2 = 0$.
Milieu de $[AC] : (1; 1; -1)$, normal $(0; 1; 1) : y + z + d = 0$ avec $1 - 1 + d = 0$. $\mathcal{P}_2 : y + z = 0$.
Milieu de $[AD] : (2; 3; 0)$, normal $(1; 1; 0) : x + y + d = 0$ avec $5 + d = 0$. $\mathcal{P}_3 : x + y - 5 = 0$.
3. Les vecteurs normaux $(1; -1; 1)$ et $(0; 1; 1)$ ne sont pas colinéaires : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est une droite. Pour tout s , le point $(2 + 2s; s; -s)$ vérifie $(2 + 2s) - s - s - 2 = 0$ et $s + (-s) = 0$: il appartient aux deux plans. Les points donnés décrivent une droite incluse dans l'intersection, qui est elle-même une droite : elles sont égales.
4. $MA = MB \iff M \in \mathcal{P}_1$, et de même pour $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$. Un point est équidistant de A, B, C, D si et seulement s'il appartient aux trois plans. En reportant la droite dans $\mathcal{P}_3 : (2 + 2s) + s - 5 = 3s - 3 = 0$, donc $s = 1$.
Conclusion : $\Omega(4; 1; -1)$ est l'unique point équidistant, et $\Omega A = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}$. Contrôle : $\Omega B^2 = 1 + 1 + 9 = 11$, $\Omega C^2 = 9 + 1 + 1 = 11$, $\Omega D^2 = 1 + 9 + 1 = 11$.

S6.

1. Le point $M = A + t\vec{u}$ appartient au plan si et seulement si $a(x_A + tu_x) + b(y_A + tu_y) + c(z_A + tu_z) + d = 0$, soit $\text{num} + t \times \text{den} = 0$. Ici num est la valeur de l'équation en A et den vaut $\vec{n} \cdot \vec{u}$.
 - Si $\text{den} \neq 0$: une seule solution $t = -\text{num}/\text{den}$, donc un point d'intersection (première branche).
 - Si $\text{den} = 0$ et $\text{num} = 0$: l'équation est vérifiée pour tout t , la droite est incluse dans le plan.
 - Si $\text{den} = 0$ et $\text{num} \neq 0$: aucune solution, la droite est strictement parallèle au plan.
2. $\text{num} = 1 + 0 + 6 - 5 = 2$ et $\text{den} = 2 + 2 - 3 = 1$, donc $t = -2$ et le point est $(1 - 4; -2; 2 + 2) = (-3; -2; 4)$. Le programme renvoie ("secante", $(-3.0, -2.0, 4.0)$). Vérification : $-3 - 4 + 12 - 5 = 0$.
3. Premier appel : $\text{num} = 1 + 4 + 0 - 5 = 0$ et $\text{den} = 2 - 2 + 0 = 0$, résultat ("incluse", None).
Second appel : $\text{num} = -5$ et $\text{den} = 3 + 0 - 3 = 0$, résultat ("parallele", None).
4. $d = \frac{|1 + 0 + 6 - 5|}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7} \approx 0,535$. Avec le point $(-3; -2; 4)$, qui appartient au plan, la fonction renvoie 0,0.

S7.

1. $\overrightarrow{AB}(-2; 2; 0) = \overrightarrow{DC}$: $ABCD$ est un parallélogramme. Ses diagonales ont même milieu $O(0; 0; 0)$.
 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (2, -2, 0) \cdot (-2, -2, 0) = -4 + 4 = 0$: angle droit en B , et $AB^2 = BC^2 = 8$: c'est un carré de côté $2\sqrt{2}$.
 $SA^2 = 4 + 0 + 4 = 8$, et de même $SB^2 = SC^2 = SD^2 = 8$. **Conclusion :** $SA = SB = SC = SD = AB = 2\sqrt{2}$, donc les quatre faces latérales sont des triangles équilatéraux.
2. $\overrightarrow{SA}(2; 0; -2)$ et $\overrightarrow{SB}(0; 2; -2)$ ne sont pas colinéaires, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{SA} = 2 - 2 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{SB} = 2 - 2 = 0$.
Équation $x + y + z + d = 0$ avec $S : 2 + d = 0$.
Conclusion : $(SAB) : x + y + z - 2 = 0$. Vérification : $A : 2 - 2 = 0$; $B : 2 - 2 = 0$.
3. $d(O, (SAB)) = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Le triangle SAB est équilatéral de côté $2\sqrt{2}$: son aire est $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 8 = 2\sqrt{3}$.
4. Avec la base $SAB : V = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$. Avec la base OAB (rectangle en O , d'aire $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$) et la hauteur $OS = 2 : V = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$.
Conclusion : $V(OSAB) = \frac{4}{3}$. La pyramide est formée de quatre tétraèdres identiques :

$$V(SABCD) = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

$$\text{Contrôle : } \frac{1}{3} \times 8 \times 2 = \frac{16}{3}.$$

5. $H = C + k\vec{n} = (-2 + k; k; k)$ et $H \in (SAB) : -2 + 3k - 2 = 0$, donc $k = \frac{4}{3}$.

Conclusion : $H\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$ et $CH = \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Contrôle : $\frac{|-2 + 0 + 0 - 2|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

S8.

- Pour $M : 0 + 4 + 2 + 3 = 9$. Pour $B : -4 + 4 + 6 + 3 = 9$. Les deux valeurs ont même signe : M et B sont du même côté du plan $\mathcal{P}$.
- $\vec{n}(1; 2; -2)$ est normal à $\mathcal{P}$. $H = M + k\vec{n} = (k; 2 + 2k; -1 - 2k)$ et $H \in \mathcal{P} : k + 4 + 4k + 2 + 4k + 3 = 9k + 9 = 0$, donc $k = -1$.
 $H(-1; 0; 1)$. Comme $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH} : M' = (0 - 2; 2 - 4; -1 + 4)$, soit $M'(-2; -2; 3)$.
- H est le milieu de $[MM']$ et $\overrightarrow{MM'} = -2\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P} : \mathcal{P}$ est le plan médiateur de $[MM']$. Donc $NM = NM'$ pour tout $N \in \mathcal{P}$.
- $\overrightarrow{M'B}(-2; 4; -6)$. Un point de $(M'B)$ est $(-2 - 2s; -2 + 4s; 3 - 6s)$. Dans $\mathcal{P} : (-2 - 2s) + 2(-2 + 4s) - 2(3 - 6s) + 3 = 18s - 9 = 0$, donc $s = \frac{1}{2}$.
Conclusion : $I(-3; 0; 0)$. Vérification : $-3 + 3 = 0$.
- Pour $N \in \mathcal{P} : NM + NB = NM' + NB \geq M'B$ (inégalité triangulaire), avec égalité si et seulement si $N \in [M'B]$. Comme $s = \frac{1}{2} \in [0; 1]$, $I \in [M'B]$ et l'égalité a lieu pour $N = I$.
 $M'B^2 = 4 + 16 + 36 = 56$.
Conclusion : la valeur minimale de $NM + NB$ est $M'B = 2\sqrt{14}$, atteinte en I . Contrôle : $IM^2 = 9 + 4 + 1 = 14$ et $IB^2 = 1 + 4 + 9 = 14$, donc $IM + IB = 2\sqrt{14}$.

S9.

- $\overrightarrow{MA}(1 - x; 2 - y; 3 - z)$ et $\overrightarrow{MB}(3 - x; -y; 1 - z)$. Alors
 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (x^2 - 4x + 3) + (y^2 - 2y) + (z^2 - 4z + 3) = (x - 2)^2 - 1 + (y - 1)^2 - 1 + (z - 2)^2 - 1$.
Conclusion : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 - 3$.
- $\Omega(2; 1; 2)$. D'après la question 1, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \Omega M^2 - 3$. Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff \Omega M = \sqrt{3}$.
- $\vec{n}(2; -1; 2)$, $\|\vec{n}\| = 3$. $d(\Omega, \mathcal{P}) = \frac{|4 - 1 + 4 - 4|}{3} = 1$. $H = \Omega + k\vec{n} = (2 + 2k; 1 - k; 2 + 2k)$ et $H \in \mathcal{P} : 4 + 4k - 1 + k + 4 + 4k - 4 = 9k + 3 = 0$, donc $k = -\frac{1}{3}$.
Conclusion : $H\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$ et $\Omega H = 1$.
- Si $M \in \mathcal{P}$, le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est dans la direction de $\mathcal{P}$, donc orthogonal à $\overrightarrow{\Omega H}$ (colinéaire à $\vec{n}$). Le théorème de Pythagore donne $\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2 = 1 + HM^2$.
Ainsi, pour $M \in \mathcal{P} : M \in \mathcal{E} \iff 1 + HM^2 = 3 \iff HM = \sqrt{2}$.
Conclusion : $\mathcal{E} \cap \mathcal{P}$ est le cercle de $\mathcal{P}$ de centre H et de rayon $\sqrt{2}$.