

Orthogonalité et distances dans l'espace

Fiche Défi

Nom : _____

Date : _____

Sauf mention contraire, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice D1 : Démonstration : le projeté orthogonal est le point le plus proche

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c) \neq \vec{0}$.

1. Démontrer que $M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff ax + by + cz + d = 0$, avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.
2. Soit $M_0(x_0; y_0; z_0)$ et H son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$. On écrit $H = M_0 + k\vec{n}$. Déterminer k , puis démontrer que $M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
3. Démontrer que, pour tout point N de $\mathcal{P}$, $M_0N \geq M_0H$, avec égalité si et seulement si $N = H$.
4. Application : $\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 3 = 0$, $M_0(3; 1; -2)$ et $N_0(0; 3; 3)$. Calculer M_0H et les coordonnées de H . Vérifier que $N_0 \in \mathcal{P}$ et que $M_0N_0^2 = M_0H^2 + HN_0^2$.

Exercice D2 : Distance entre deux droites non coplanaires

Cet exercice dépasse le programme (la distance entre deux droites non coplanaires n'y figure pas) : pour aller plus loin, hors programme.

On considère la droite d_1 passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}(2; 1; -2)$, et la droite d_2 passant par $B(3; 0; -3)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(1; 2; 2)$.

1. Montrer que d_1 et d_2 sont orthogonales, puis qu'elles n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles.
2. Montrer que $\vec{w}(2; -2; 1)$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
3. Pour tous réels t et s , on note M_t le point de d_1 tel que $\overrightarrow{OM_t} = t\vec{u}$ et $N_s = B + s\vec{v}$ le point de d_2 de paramètre s . Exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{M_tN_s}$ en fonction de t et s .
4. Montrer que $M_tN_s^2 = 9(t - \frac{4}{3})^2 + 9(s - \frac{1}{3})^2 + 1$. En déduire la distance minimale entre un point de d_1 et un point de d_2 , et les valeurs de t et s pour lesquelles elle est atteinte.
5. Pour ces valeurs, montrer que $\overrightarrow{M_tN_s}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. Vérifier que $\overrightarrow{M_tN_s} \cdot \vec{w}$ est constant pour tous t et s , et interpréter ce résultat.

Exercice D3 : Un triangle variable dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Pour tout réel $t \in [0; 1]$, on note M_t le point tel que $\overrightarrow{AM_t} = t\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD} + (1-t)\overrightarrow{AE}$.

1. Montrer que M_t appartient au segment $[EC]$.
2. Montrer que $M_tB^2 = M_tD^2 = 3t^2 - 4t + 2$. Que peut-on dire du triangle M_tBD ?
3. Pour quelles valeurs de t le triangle M_tBD est-il rectangle en M_t ?
4. Soit I le milieu de $[BD]$. Montrer que $M_tI^2 = 3t^2 - 4t + \frac{3}{2}$ et que $\overrightarrow{M_tI} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. En déduire l'aire du triangle M_tBD en fonction de t .
5. Déterminer t pour que cette aire soit minimale, ainsi que la valeur de ce minimum. Montrer que, pour cette valeur de t , M_t est le projeté orthogonal de I sur la droite (EC) .

Exercice D4 : Projection orthogonale d'une droite sur un plan

On considère le plan $\mathcal{P} : x + y + z - 3 = 0$ et la droite d passant par $A(1; 0; 0)$ de vecteur directeur $\vec{u}(1; -1; 2)$.

1. Montrer que d et $\mathcal{P}$ sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection J .
2. Montrer que $\vec{m}(3; -1; -2)$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{n}(1; 1; 1)$. En déduire une équation du plan $\mathcal{Q}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{m}$. Montrer que d est contenue dans $\mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q}$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
3. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ est la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $x = s, y = 9 - 5s, z = 4s - 6$.

($s \in \mathbb{R}$).

4. Soit $M_t = A + t\vec{u}$ un point de d et H_t son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$. Montrer que H_t appartient à $\mathcal{Q}$, puis que H_t est le point de $\mathcal{D}$ de paramètre $s = \frac{t+5}{3}$.
5. Conclure : quel est l'ensemble des projetés orthogonaux sur $\mathcal{P}$ des points de d ? Vérifier avec M_{-1} .

Exercice D5 : Plan tangent à une sphère

Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(2; -1; 3)$ et de rayon 3, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $\Omega M = 3$, et soit $A(0; 1; 2)$.

1. Montrer que $A \in \mathcal{S}$ et déterminer une équation du plan $\mathcal{T}$ passant par A et orthogonal à (ΩA) .
2. Montrer que, pour tout point M de $\mathcal{T}$, $\Omega M^2 = \Omega A^2 + AM^2$. En déduire que $\mathcal{T} \cap \mathcal{S} = \{A\}$.
3. Soit $\mathcal{P} : 2x - 2y + z - 3 = 0$. Calculer la distance de Ω à $\mathcal{P}$. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. Déterminer les plans parallèles à $\mathcal{T}$ qui ont exactement un point commun avec $\mathcal{S}$.
5. Soit Δ la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{w}(1; 1; 0)$. Montrer que Δ est contenue dans $\mathcal{T}$ et que $\Delta \cap \mathcal{S} = \{A\}$ en résolvant une équation en t .

Exercice D6 : Python : distance d'un point à une droite

On considère la droite d passant par $A(0; 1; 2)$ de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; 2)$ et le point $P(3; 1; 0)$. Le programme suivant recherche, parmi les points $M_t = A + t\vec{u}$ avec $t = k/1000$ (k entier entre -2000 et 2000), celui qui est le plus proche de P .

```
from math import sqrt

A = (0, 1, 2)
u = (1, 2, 2)
P = (3, 1, 0)

def dist(t):
    x = A[0] + t*u[0]
    y = A[1] + t*u[1]
    z = A[2] + t*u[2]
    return sqrt((P[0]-x)**2 + (P[1]-y)**2 + (P[2]-z)**2)

tmin = -2
dmin = dist(tmin)
for k in range(-2000, 2001):
    t = k/1000
    if dist(t) < dmin:
        dmin = dist(t)
        tmin = t
print(tmin, round(dmin, 4))
```

1. Montrer que $PM_t^2 = 9t^2 + 2t + 13$ pour tout réel t .
2. Déterminer, par le calcul, la valeur exacte t_0 pour laquelle PM_t est minimale, la valeur exacte de la distance de P à d , puis les coordonnées du projeté orthogonal H de P sur d (en vérifiant que $\overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = 0$).
3. Prévoir l'affichage du programme et expliquer pourquoi la valeur de `tmin` n'est pas exactement t_0 .
4. Écrire une fonction `projete_droite(A, u, P)` qui renvoie les coordonnées du projeté orthogonal de P sur la droite de point A et de vecteur directeur u , sans balayage. On utilisera la relation $t = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ que l'on justifiera.

Exercice D7 : Le tétraèdre trirectangle

Soient a, b, c trois réels strictement positifs, $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, et $S = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

1. Montrer que (ABC) a pour équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
2. Soit H le projeté orthogonal de O sur (ABC) . Montrer que $H = \frac{1}{S} \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c} \right)$ et que $OH = \frac{1}{\sqrt{S}}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. Que représente H pour le triangle ABC ?
4. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$ de deux façons, et en déduire l'aire de ABC en fonction de a, b, c et S . Montrer que

$$\mathcal{A}(ABC)^2 = \mathcal{A}(OAB)^2 + \mathcal{A}(OBC)^2 + \mathcal{A}(OCA)^2.$$

5. Application : $a = 6, b = 3, c = 2$. Donner une équation de (ABC) , les coordonnées de H , la distance OH et l'aire de ABC .