

Corrigé : Orthogonalité et distances dans l'espace

Fiche Défi

D1.

1. Par définition d'un vecteur normal, $M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Or

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = ax + by + cz + d.$$

2. $H = M_0 + k\vec{n}$ appartient à $\mathcal{P}$: $a(x_0 + ka) + b(y_0 + kb) + c(z_0 + kc) + d = 0$, soit $(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) + k(a^2 + b^2 + c^2) = 0$. Comme $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$:

$$k = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$\text{Alors } M_0H = \|k\vec{n}\| = |k|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

3. Soit $N \in \mathcal{P}$. Le vecteur $\overrightarrow{HN}$ est dans la direction de $\mathcal{P}$, donc orthogonal à $\vec{n}$, donc à $\overrightarrow{M_0H} = k\vec{n}$.
Alors

$$M_0N^2 = \|\overrightarrow{M_0H} + \overrightarrow{HN}\|^2 = M_0H^2 + 2\overrightarrow{M_0H} \cdot \overrightarrow{HN} + HN^2 = M_0H^2 + HN^2 \geq M_0H^2.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $HN = 0$, c'est-à-dire $N = H$. La distance de M_0 à $\mathcal{P}$ est donc la plus petite des distances de M_0 aux points de $\mathcal{P}$.

4. $\vec{n}(2; -1; 2)$, $\|\vec{n}\| = 3$ et $2 \times 3 - 1 - 4 - 3 = -2$ pour M_0 . Donc $M_0H = \frac{2}{3}$ et $k = \frac{2}{9}$, soit

$$H = \left(3 + \frac{4}{9}; 1 - \frac{2}{9}; -2 + \frac{4}{9}\right) = \left(\frac{31}{9}; \frac{7}{9}; -\frac{14}{9}\right).$$

Vérification : $\frac{62}{9} - \frac{7}{9} - \frac{28}{9} - \frac{27}{9} = 0$. Pour N_0 : $0 - 3 + 6 - 3 = 0$, donc $N_0 \in \mathcal{P}$.

$$M_0N_0^2 = 9 + 4 + 25 = 38, M_0H^2 = \frac{4}{9} \text{ et } \overrightarrow{HN_0} \left(-\frac{31}{9}; \frac{20}{9}; \frac{41}{9}\right) \text{ donne } HN_0^2 = \frac{961 + 400 + 1681}{81} = \frac{338}{9}.$$

$$\text{Conclusion : } \frac{4}{9} + \frac{338}{9} = \frac{342}{9} = 38 = M_0N_0^2.$$

D2.

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 2 - 4 = 0$: les droites sont orthogonales (et $\vec{u}, \vec{v}$ ne sont pas colinéaires : ils sont non nuls et orthogonaux). Un point commun vérifierait $2t = 3 + s$, $t = 2s$, $-2t = -3 + 2s$. Les deux premières équations donnent $4s = 3 + s$, donc $s = 1$ et $t = 2$; la troisième devient $-4 = -1$: impossible.

Conclusion : d_1 et d_2 sont orthogonales, non parallèles et sans point commun (donc non coplanaires).

2. $\vec{w} \cdot \vec{u} = 4 - 2 - 2 = 0$ et $\vec{w} \cdot \vec{v} = 2 - 4 + 2 = 0$.
3. $M_t(2t; t; -2t)$ et $N_s(3 + s; 2s; -3 + 2s)$, donc $\overrightarrow{M_tN_s}(3 + s - 2t; 2s - t; -3 + 2s + 2t)$.
4. En développant :

$$(3 + s - 2t)^2 = 9 + s^2 + 4t^2 + 6s - 12t - 4st, \quad (2s - t)^2 = 4s^2 - 4st + t^2,$$

$$(-3 + 2s + 2t)^2 = 9 + 4s^2 + 4t^2 - 12s - 12t + 8st.$$

La somme vaut $M_tN_s^2 = 9s^2 + 9t^2 - 6s - 24t + 18$. Or $9\left(t - \frac{4}{3}\right)^2 + 9\left(s - \frac{1}{3}\right)^2 + 1 = 9t^2 - 24t + 16 + 9s^2 - 6s + 1 + 1$, ce qui est la même expression.

Donc $M_tN_s^2 \geq 1$, avec égalité si et seulement si $t = \frac{4}{3}$ et $s = \frac{1}{3}$.

Conclusion : la distance minimale entre un point de d_1 et un point de d_2 est 1, atteinte pour $t = \frac{4}{3}$ et $s = \frac{1}{3}$.

5. Pour ces valeurs : $\overrightarrow{M_t N_s} \left(3 + \frac{1}{3} - \frac{8}{3}; \frac{2}{3} - \frac{4}{3}; -3 + \frac{2}{3} + \frac{8}{3} \right) = \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \vec{w}$. Ce vecteur est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ (question 2) et de norme 1 : le segment $[M_t N_s]$ est une perpendiculaire commune aux deux droites.

Pour tous t, s : $\overrightarrow{M_t N_s} \cdot \vec{w} = 2(3 + s - 2t) - 2(2s - t) + (-3 + 2s + 2t) = 3$. Comme $\|\vec{w}\| = 3$, la projection de $\overrightarrow{M_t N_s}$ sur la direction de $\vec{w}$ a toujours pour longueur $\frac{3}{3} = 1$: tout segment joignant les deux droites a une longueur au moins égale à 1, ce qui retrouve la distance minimale.

D3.

1. $E(0; 0; 1)$, $C(1; 1; 0)$, $M_t(t; t; 1 - t)$. Donc $\overrightarrow{EC}(1; 1; -1)$ et $\overrightarrow{EM_t}(t; t; -t) = t \overrightarrow{EC}$ avec $t \in [0; 1]$: $M_t \in [EC]$.
2. $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$. $\overrightarrow{M_t B}(1 - t; -t; t - 1)$ et $\overrightarrow{M_t D}(-t; 1 - t; t - 1)$:

$$M_t B^2 = 2(1 - t)^2 + t^2 = 3t^2 - 4t + 2 = M_t D^2.$$

Conclusion : le triangle $M_t BD$ est isocèle en M_t .

3. $\overrightarrow{M_t B} \cdot \overrightarrow{M_t D} = -t(1 - t) - t(1 - t) + (t - 1)^2 = (1 - t)(1 - 3t)$. Elle est nulle si et seulement si $t = \frac{1}{3}$ ou $t = 1$.

Conclusion : le triangle est rectangle en M_t pour $t = \frac{1}{3}$ et pour $t = 1$ (où $M_1 = C$, et $CB \perp CD$).

4. $I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$ et $\overrightarrow{M_t I}(\frac{1}{2} - t; \frac{1}{2} - t; t - 1)$:

$$M_t I^2 = 2 \left(\frac{1}{2} - t \right)^2 + (1 - t)^2 = \frac{1}{2} - 2t + 2t^2 + 1 - 2t + t^2 = 3t^2 - 4t + \frac{3}{2}.$$

$\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$ donne $\overrightarrow{M_t I} \cdot \overrightarrow{BD} = -(\frac{1}{2} - t) + (\frac{1}{2} - t) = 0$. Donc $[M_t I]$ est la hauteur issue de M_t et, avec $BD = \sqrt{2}$:

$$\mathcal{A}(M_t BD) = \frac{1}{2} \sqrt{2} M_t I = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3t^2 - 4t + \frac{3}{2}}.$$

5. $3t^2 - 4t + \frac{3}{2} = 3 \left(t - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{1}{6}$. Le minimum de $M_t I^2$ sur $[0; 1]$ est $\frac{1}{6}$, atteint pour $t = \frac{2}{3} \in [0; 1]$.

Conclusion : l'aire est minimale pour $t = \frac{2}{3}$ et vaut $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0,29$.

Pour $t = \frac{2}{3}$: $M(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}) \in (EC)$ et $\overrightarrow{MI}(-\frac{1}{6}; -\frac{1}{6}; -\frac{1}{3})$ vérifie $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{EC} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 0$. Donc $M_{2/3}$ est le projeté orthogonal de I sur (EC) , ce qui est cohérent avec le fait que $M_t I$ est minimale.

D4.

1. $M_t = A + t\vec{u} = (1 + t; -t; 2t)$. Dans $\mathcal{P}$: $(1 + t) - t + 2t - 3 = 2t - 2 = 0$, donc $t = 1$.
Conclusion : d et $\mathcal{P}$ sont sécants en $J(2; -1; 2)$.
2. $\vec{m} \cdot \vec{u} = 3 + 1 - 4 = 0$ et $\vec{m} \cdot \vec{n} = 3 - 1 - 2 = 0$. Une équation de $\mathcal{Q}$ est $3x - y - 2z + d = 0$ avec $3 + d = 0$: $\mathcal{Q}$: $3x - y - 2z - 3 = 0$.
Pour M_t : $3(1 + t) + t - 4t - 3 = 0$ pour tout t : $d \subset \mathcal{Q}$. Enfin $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$: les vecteurs normaux sont orthogonaux, donc $\mathcal{Q} \perp \mathcal{P}$.
3. Les vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{m}$ ne sont pas colinéaires : $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ est une droite. Le système $x + y + z = 3$, $3x - y - 2z = 3$ donne par addition $4x - z = 6$, donc $z = 4x - 6$ et $y = 3 - x - z = 9 - 5x$. Avec $x = s$:

Conclusion : $\mathcal{D}$: $x = s$, $y = 9 - 5s$, $z = 4s - 6$.

4. Dans $\mathcal{P}$, la valeur de l'équation en M_t est $2t - 2$, donc $H_t = M_t + k\vec{n}$ avec $k = -\frac{2t - 2}{3}$. On a $H_t \in \mathcal{P}$ et

$$\overrightarrow{AH_t} \cdot \vec{m} = \overrightarrow{AM_t} \cdot \vec{m} + k \vec{n} \cdot \vec{m} = 0 + 0 = 0,$$

donc $H_t \in \mathcal{Q}$. Explicitement,

$$H_t = \left(\frac{t + 5}{3}; \frac{2 - 5t}{3}; \frac{4t + 2}{3} \right).$$

Pour $s = \frac{t+5}{3}$: $9-5s = \frac{27-5t-25}{3} = \frac{2-5t}{3}$ et $4s-6 = \frac{4t+20-18}{3} = \frac{4t+2}{3}$. Donc H_t est le point de $\mathcal{D}$ de paramètre $\frac{t+5}{3}$.

5. Quand t décrit $\mathbb{R}$, $s = \frac{t+5}{3}$ décrit $\mathbb{R}$.

Conclusion : l'ensemble des projetés orthogonaux des points de d sur $\mathcal{P}$ est la droite $\mathcal{D}$ tout entière. Vérification avec $M_{-1}(0; 1; -2)$: l'équation de $\mathcal{P}$ y vaut -4 , $k = \frac{4}{3}$ et $H_{-1}(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{2}{3})$; pour $s = \frac{4}{3}$ on trouve $(\frac{4}{3}; 9 - \frac{20}{3}; \frac{16}{3} - 6) = (\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{2}{3})$.

D5.

1. $\overrightarrow{\Omega A}(-2; 2; -1)$ et $\Omega A = \sqrt{4+4+1} = 3 : A \in \mathcal{S}$. Le plan $\mathcal{T}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$, colinéaire à $(2; -2; 1) : 2x - 2y + z + d = 0$ avec $A : -2 + 2 + d = 0$.

Conclusion : $\mathcal{T} : 2x - 2y + z = 0$.

2. Si $M \in \mathcal{T}$, alors $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0$ et $\Omega M^2 = \|\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AM}\|^2 = \Omega A^2 + AM^2 = 9 + AM^2$. Donc $M \in \mathcal{S} \iff AM^2 = 0 \iff M = A$.

Conclusion : $\mathcal{T} \cap \mathcal{S} = \{A\}$: $\mathcal{T}$ est tangent à $\mathcal{S}$ en A .

3. $\vec{n}(2; -2; 1)$, $\|\vec{n}\| = 3$, et $2 \times 2 + 2 + 3 - 3 = 6$ en $\Omega : d(\Omega, \mathcal{P}) = 2 < 3$. Le projeté de Ω est $H = \Omega + k\vec{n} = (2 + 2k; -1 - 2k; 3 + k)$, avec $4 + 4k + 2 + 4k + 3 + k - 3 = 9k + 6 = 0$, soit $k = -\frac{2}{3}$ et $H(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{7}{3})$.

Pour $M \in \mathcal{P} : \Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2 = 4 + HM^2$ (Pythagore, comme à l'exercice D1). Donc $M \in \mathcal{S} \iff HM^2 = 5$.

Conclusion : $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est le cercle de $\mathcal{P}$ de centre $H(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{7}{3})$ et de rayon $\sqrt{5}$.

4. Un plan $2x - 2y + z + d = 0$ a un seul point commun avec $\mathcal{S}$ si et seulement si sa distance à Ω vaut le rayon : $\frac{|9+d|}{3} = 3$, soit $d = 0$ ou $d = -18$ (si la distance est inférieure à 3, l'intersection est un cercle; si elle est supérieure, elle est vide).

Conclusion : ce sont $\mathcal{T}$ et le plan $2x - 2y + z - 18 = 0$ (tangent au point diamétralement opposé à A , $(4; -3; 4)$).

5. $\vec{w} \cdot \vec{n} = 2 - 2 + 0 = 0$ et $A \in \mathcal{T}$: tout point $A + t\vec{w}$ vérifie $2t - 2t = 0$ dans l'équation de $\mathcal{T}$, donc $\Delta \subset \mathcal{T}$.

Un point de Δ est $(t; 1+t; 2)$ et $\Omega M^2 = (t-2)^2 + (t+2)^2 + 1 = 2t^2 + 9$. Alors $M \in \mathcal{S} \iff 2t^2 + 9 = 9 \iff t = 0$.

Conclusion : $\Delta \cap \mathcal{S} = \{A\}$: Δ est une tangente à la sphère en A .

D6.

1. $M_t(t; 1+2t; 2+2t)$ et $\overrightarrow{PM_t}(t-3; 2t; 2+2t)$:

$$PM_t^2 = t^2 - 6t + 9 + 4t^2 + 4 + 8t + 4t^2 = 9t^2 + 2t + 13.$$

2. $9t^2 + 2t + 13 = 9\left(t + \frac{1}{9}\right)^2 + 13 - \frac{1}{9} = 9\left(t + \frac{1}{9}\right)^2 + \frac{116}{9}$. Le minimum est atteint pour $t_0 = -\frac{1}{9}$.

Conclusion : $d(P, d) = \sqrt{\frac{116}{9}} = \frac{2\sqrt{29}}{3} \approx 3,590$ et $H = M_{t_0}\left(-\frac{1}{9}; \frac{7}{9}; \frac{16}{9}\right)$.

Vérification : $\overrightarrow{PH}\left(-\frac{28}{9}; -\frac{2}{9}; \frac{16}{9}\right)$ et $\overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = -\frac{28}{9} - \frac{4}{9} + \frac{32}{9} = 0$; $PH^2 = \frac{784 + 4 + 256}{81} = \frac{116}{9}$.

3. Le programme n'examine que des valeurs de t multiples de 0,001; la plus proche de $t_0 = -0,111 \dots$ est $-0,111$. L'affichage est $-0.111 \ 3.5901$. La distance affichée est quasi exacte : en $-0,111$, PM_t^2 ne diffère de $\frac{116}{9}$ que de $9 \times (1,1 \times 10^{-4})^2 \approx 10^{-7}$.

4. Si $H = A + t\vec{u}$ est le projeté de P , alors $\overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = 0$, soit $(t\vec{u} - \overrightarrow{AP}) \cdot \vec{u} = 0$, donc $t\vec{u} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}$.

def projete_droite(A, u, P):

AP = (P[0]-A[0], P[1]-A[1], P[2]-A[2])

t = (AP[0]*u[0] + AP[1]*u[1] + AP[2]*u[2]) / (u[0]**2 + u[1]**2 + u[2]**2)

```
return (A[0]+t*u[0], A[1]+t*u[1], A[2]+t*u[2])
```

Test : l'appel `projete_droite((0,1,2), (1,2,2), (3,1,0))`

donne $t = \frac{-1}{9}$ et renvoie environ $(-0,111; 0,778; 1,778)$, c'est-à-dire H .

D7.

1. L'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ est de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ avec $(\alpha; \beta; \gamma) = (\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}) \neq \vec{0}$: c'est un plan. Les points A, B, C la vérifient ($\frac{a}{a} = 1$, etc.) et ne sont pas alignés ($\overrightarrow{AB}(-a; b; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-a; 0; c)$ ne sont pas colinéaires). C'est donc le plan (ABC) , de vecteur normal $\vec{n}(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c})$.
2. $H = k\vec{n}$ avec $H \in (ABC) : \vec{n} \cdot k\vec{n} = kS = 1$, donc $k = \frac{1}{S}$ et $H = \frac{1}{S}(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c})$. Alors $OH = |k| \|\vec{n}\| = \frac{1}{S} \sqrt{S} = \frac{1}{\sqrt{S}}$.
3. $\overrightarrow{BC}(0; -b; c)$, $\overrightarrow{CA}(a; 0; -c)$. Comme $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$:

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} = -k \left(\frac{1}{b}(-b) + \frac{1}{c}c \right) = -k(-1 + 1) = 0.$$

De même $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ et $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = -k \left(\frac{1}{a}a + \frac{1}{c}(-c) \right) = 0$.

Conclusion : H appartient au plan (ABC) et aux hauteurs issues de A et de B du triangle ABC : H est l'orthocentre de ABC .

4. Le volume vaut $\frac{1}{3} \times \frac{ab}{2} \times c = \frac{abc}{6}$ (base OAB , hauteur OC) et aussi $\frac{1}{3} \mathcal{A}(ABC) \times OH$. Donc

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{3V}{OH} = \frac{abc}{2} \sqrt{S}.$$

Alors $\mathcal{A}(ABC)^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = \frac{b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2}{4}$. Or $\mathcal{A}(OAB) = \frac{ab}{2}$, $\mathcal{A}(OBC) = \frac{bc}{2}$, $\mathcal{A}(OCA) = \frac{ca}{2}$.

Conclusion : $\mathcal{A}(ABC)^2 = \mathcal{A}(OAB)^2 + \mathcal{A}(OBC)^2 + \mathcal{A}(OCA)^2$.

5. Pour $a = 6, b = 3, c = 2 : \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$, soit $(ABC) : x + 2y + 3z - 6 = 0$. $S = \frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{7}{18}$.

$$H = \frac{18}{7} \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{3}{7}; \frac{6}{7}; \frac{9}{7} \right) \text{ et } OH = \sqrt{\frac{18}{7}} = \frac{3\sqrt{14}}{7} \approx 1,60.$$

$$\mathcal{A}(ABC) = 18 \sqrt{\frac{7}{18}} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14} \approx 11,22.$$

Contrôle : $\mathcal{A}(OAB) = 9$, $\mathcal{A}(OBC) = 3$, $\mathcal{A}(OCA) = 6$ et $81 + 9 + 36 = 126$; $H : \frac{3}{7} + \frac{12}{7} + \frac{27}{7} = 6$.