

Orthogonalité et distances dans l'espace

Fiche Bases

Nom : _____

Date : _____

Sauf mention contraire, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice B1 : Produit scalaire, norme et orthogonalité en coordonnées

On considère $\vec{u}(2; -1; 3)$, $\vec{v}(1; 4; 2)$, $A(1; 2; -1)$ et $B(3; -2; 3)$.

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
3. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, puis calculer la distance AB .
4. Calculer $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ de deux façons : avec les coordonnées, puis à l'aide de $\|\vec{u}\|^2$ et $\|\vec{v}\|^2$.
5. Déterminer le réel x pour que le vecteur $\vec{w}(x; 2; -1)$ soit orthogonal à $\vec{t}(3; -1; 4)$.

Exercice B2 : Produit scalaire sans coordonnées

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 2 : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes.

1. Justifier que B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) , puis que B est aussi le projeté orthogonal de G sur (AB) . En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.
2. Calculer AC^2 , AG^2 et CG^2 . En déduire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(AC^2 + AG^2 - CG^2)$.
3. Calculer $\cos \widehat{CAG}$, puis donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{CAG}$ en degrés, à 0,1 degré près.

Exercice B3 : Triangle rectangle et angle

1. On donne $A(1; 0; 2)$, $B(3; 2; 1)$ et $C(3; -1; 4)$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Que peut-on dire du triangle ABC ? Calculer ses trois côtés.
2. On donne $D(1; 2; 0)$, $E(2; 3; 0)$ et $F(1; 3; 1)$. Calculer $\cos \widehat{EDF}$, puis déterminer la mesure de l'angle $\widehat{EDF}$ en degrés.

Exercice B4 : Vrai ou faux ?

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 (même disposition des sommets qu'à l'exercice B2). On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant par un calcul.

1. Les droites (AG) et (BD) sont orthogonales.
2. Les droites (AC) et (EG) sont orthogonales.
3. Les droites (AB) et (CG) sont perpendiculaires.
4. Les droites (EC) et (BD) sont orthogonales.
5. Le triangle BDG est équilatéral.
6. Les droites (AG) et (EC) sont orthogonales.

Exercice B5 : Équation d'un plan et vecteur normal

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1; 2; -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2; -1; 3)$. Les points $B(0; 0; -1)$ et $C(1; 1; 0)$ appartiennent-ils à $\mathcal{P}$?
2. Le plan $\mathcal{Q}$ a pour équation $x - 4y + z - 5 = 0$. Donner un vecteur normal à $\mathcal{Q}$ et un point de $\mathcal{Q}$ dont deux coordonnées sont nulles.
3. Déterminer une équation du plan $\mathcal{R}$ passant par $D(0; 0; 2)$ et parallèle au plan d'équation $x + 2y - z = 0$.

Exercice B6 : Plan défini par trois points

On donne $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ et $C(0; 0; 3)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?

2. Soit $\vec{n}(a; b; c)$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$. Écrire les deux équations vérifiées par a, b, c , puis donner un vecteur $\vec{n}$ en choisissant $c = 2$.
3. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) , puis vérifier avec les points B et C .

Exercice B7 : Positions relatives de plans

On considère les plans $P_1 : 2x - y + z - 3 = 0$, $P_2 : -4x + 2y - 2z + 1 = 0$, $P_3 : x + y - z = 0$ et $P_4 : x + y + 3z - 2 = 0$.

1. Montrer que P_1 et P_2 sont parallèles. Sont-ils confondus ?
2. Montrer que P_1 et P_3 sont perpendiculaires.
3. Les plans P_1 et P_4 sont-ils parallèles ? perpendiculaires ? Que peut-on en conclure ?

Exercice B8 : Droite et plan

La droite d a pour représentation paramétrique $x = t, y = 1 + t, z = 2t$ ($t \in \mathbb{R}$). Pour chacun des plans suivants, étudier l'intersection avec d (un point, aucun point, ou la droite entière) :

$$\mathcal{P}_a : x + y - z - 5 = 0 \quad \mathcal{P}_b : x + y - z - 1 = 0 \quad \mathcal{P}_c : x - y + z - 3 = 0.$$

Exercice B9 : Distance et projeté orthogonal

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - y + 2z - 3 = 0$.

1. Calculer la distance du point $A(1; 2; 3)$ au plan $\mathcal{P}$.
2. Soit $B(0; 0; 6)$. Déterminer le réel k tel que le point $H = B + k\vec{n}$, où $\vec{n}(2; -1; 2)$, appartienne à $\mathcal{P}$. Donner les coordonnées de H , puis calculer BH et comparer avec la formule de la distance d'un point à un plan.

Exercice B10 : Python

On considère le programme suivant.

```
from math import sqrt

def ps(u, v):
    return u[0]*v[0] + u[1]*v[1] + u[2]*v[2]

def orthogonaux(u, v):
    return ps(u, v) == 0

def rectangle_en_A(A, B, C):
    AB = (B[0]-A[0], B[1]-A[1], B[2]-A[2])
    AC = (C[0]-A[0], C[1]-A[1], C[2]-A[2])
    return orthogonaux(AB, AC)
```

1. Que renvoient `ps((1,2,3), (4,-1,0))` et `orthogonaux((1,2,-1), (3,-1,1))` ?
2. Que renvoie `rectangle_en_A((1,0,2), (3,2,1), (3,-1,4))` ? Retrouver ce résultat par le calcul (voir l'exercice B3).
3. Écrire une fonction `norme(u)` qui renvoie la norme d'un vecteur $\vec{u}$, puis une fonction `distance_plan(M, a, b, c, d)` qui renvoie la distance du point M au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Exercice B11 : Droite orthogonale à un plan

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 3 ($[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes). On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.

1. Donner les coordonnées des points B, D, E et G .
2. Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) , puis déterminer une équation cartésienne de ce plan.

3. Déterminer les coordonnées du point K , intersection de (AG) et du plan (BDE) , puis calculer AK .
Que représente K pour le point A ?

Exercice B12 : Calcul sur les produits scalaires

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. En utilisant la symétrie et la bilinéarité du produit scalaire, développer $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ et en déduire une expression de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ en fonction de $\|\vec{u}\|^2$, $\|\vec{v}\|^2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. On suppose $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. Calculer $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 3\vec{v})$, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ et $\|2\vec{u} - \vec{v}\|^2$.
3. On suppose $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 4$ et $\|\vec{a} + \vec{b}\| = 6$. À l'aide de la formule de polarisation $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2)$, calculer $\vec{a} \cdot \vec{b}$, puis $\|\vec{a} - \vec{b}\|$.
4. Le cube $ABCDEFGH$ a pour arête 1. Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base orthonormée de l'espace. Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BH}$ dans cette base, puis calculer le cosinus de l'angle formé par les droites (AG) et (BH) .