

Corrigé : Orthogonalité et distances dans l'espace

Fiche Bases

B1.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + (-1) \times 4 + 3 \times 2 = 2 - 4 + 6 = 4$.
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$.
- $\overrightarrow{AB}(3-1; -2-2; 3-(-1)) = (2; -4; 4)$, donc $AB = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$.
- Coordonnées : $\vec{u} + \vec{v}(3; 3; 5)$ et $\vec{u} - \vec{v}(1; -5; 1)$, donc $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 3 - 15 + 5 = -7$.
Avec les normes : $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 14 - 21 = -7$. Les deux résultats concordent.
- $\vec{w} \cdot \vec{t} = 3x - 2 - 4 = 3x - 6$. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $3x - 6 = 0$.
Conclusion : $x = 2$.

B2.

- $ABCD$ est un carré, donc $(BC) \perp (AB)$: B est le projeté orthogonal de C sur (AB) . La droite (AB) est orthogonale au plan (BCG) (face latérale du cube), donc à (BG) : B est aussi le projeté orthogonal de G sur (AB) . Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 4, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 4.$$

- AC est la diagonale d'un carré de côté 2 : $AC^2 = 4 + 4 = 8$. AG est la diagonale du cube : $AG^2 = AC^2 + CG^2 = 8 + 4 = 12$ (triangle ACG rectangle en C). $CG^2 = 4$. Donc

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(8 + 12 - 4) = 8.$$

- $AC = 2\sqrt{2}$ et $AG = 2\sqrt{3}$, donc

$$\cos \widehat{CAG} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG}}{AC \times AG} = \frac{8}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}} = \frac{8}{4\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Comme $\widehat{CAG} \in [0; 180]$ degrés, $\widehat{CAG} = \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Conclusion : $\widehat{CAG} \approx 35,3^\circ$.

B3.

- $\overrightarrow{AB}(2; 2; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(2; -1; 2)$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 - 2 - 2 = 0$, donc le triangle ABC est rectangle en A .
 $AB = \sqrt{4+4+1} = 3$, $AC = \sqrt{4+1+4} = 3$, et $\overrightarrow{BC}(0; -3; 3)$ donne $BC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. On vérifie $BC^2 = 18 = AB^2 + AC^2$.

Conclusion : ABC est rectangle isocèle en A , avec $AB = AC = 3$ et $BC = 3\sqrt{2}$.

- $\overrightarrow{DE}(1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{DF}(0; 1; 1)$. $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0 + 1 + 0 = 1$ et $DE = DF = \sqrt{2}$, donc

$$\cos \widehat{EDF} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion : $\widehat{EDF} = 60^\circ$. De plus $\overrightarrow{EF}(-1; 0; 1)$ donne $EF = \sqrt{2}$: le triangle DEF est équilatéral.

B4. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:

$A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$.

- $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$, $\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$: $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 + 1 + 0 = 0$. **Vrai.**
- $\overrightarrow{AC}(1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{EG}(1; 1; 0)$: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EG} = 1 + 1 = 2 \neq 0$ (les droites sont même parallèles). **Faux.**
- $\overrightarrow{AB}(1; 0; 0)$ et $\overrightarrow{CG}(0; 0; 1)$: produit scalaire nul, donc les droites sont orthogonales. Mais elles ne sont pas sécantes : (AB) est dans le plan $z = 0$ et (CG) coupe ce plan en $C \notin (AB)$; de plus, elles ne sont pas parallèles. Elles sont orthogonales sans être perpendiculaires. **Faux.**
- $\overrightarrow{EC}(1; 1; -1)$ et $\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$: $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 + 1 + 0 = 0$. **Vrai.**
- $\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{BG}(0; 1; 1)$, $\overrightarrow{DG}(1; 0; 1)$: $BD^2 = BG^2 = DG^2 = 2$. **Vrai.**

6. $\overrightarrow{AG}(1;1;1), \overrightarrow{EC}(1;1;-1) : \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC} = 1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$. **Faux.**

B5.

- Une équation est $2x - y + 3z + d = 0$. Comme $A \in \mathcal{P} : 2 - 2 - 3 + d = 0$, donc $d = 3$.
Conclusion : $\mathcal{P} : 2x - y + 3z + 3 = 0$.
 Pour $B : 0 - 0 - 3 + 3 = 0$, donc $B \in \mathcal{P}$. Pour $C : 2 - 1 + 0 + 3 = 4 \neq 0$, donc $C \notin \mathcal{P}$.
- Un vecteur normal à $\mathcal{Q}$ est $\vec{n}(1;-4;1)$. Pour $y = z = 0 : x - 5 = 0$ donne le point $(5;0;0)$, qui appartient bien à $\mathcal{Q}$.
- Deux plans parallèles ont des vecteurs normaux colinéaires : on prend $\vec{n}(1;2;-1)$. Une équation de $\mathcal{R}$ est $x + 2y - z + d = 0$. Comme $D \in \mathcal{R} : -2 + d = 0$, donc $d = 2$.
Conclusion : $\mathcal{R} : x + 2y - z + 2 = 0$.

B6.

- $\overrightarrow{AB}(-1;2;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;0;3)$. Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, la troisième coordonnée donne $3 = 0$: impossible. Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, la deuxième donne $2 = 0$: impossible. Les vecteurs ne sont pas colinéaires.
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ donne $-a + 2b = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donne $-a + 3c = 0$. Pour $c = 2 : a = 6$, puis $b = 3$.
 Donc $\vec{n}(6;3;2)$.
- Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : c'est un vecteur normal.
 Une équation est $6x + 3y + 2z + d = 0$; comme $A \in (ABC)$, $6 + d = 0$, donc $d = -6$.
Conclusion : $(ABC) : 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.
 Vérification : $B : 6 - 6 = 0$; $C : 6 - 6 = 0$.

B7. Vecteurs normaux : $\vec{n}_1(2;-1;1), \vec{n}_2(-4;2;-2), \vec{n}_3(1;1;-1), \vec{n}_4(1;1;3)$.

- $\vec{n}_2 = -2\vec{n}_1$: les vecteurs normaux sont colinéaires, donc P_1 et P_2 sont parallèles. Le point $(0;0;3)$ est dans P_1 ($3 - 3 = 0$) mais pas dans P_2 ($-6 + 1 = -5 \neq 0$).
Conclusion : P_1 et P_2 sont strictement parallèles (non confondus).
- $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 2 - 1 - 1 = 0$: les vecteurs normaux sont orthogonaux, donc P_1 et P_3 sont perpendiculaires.
- Si $\vec{n}_4 = \lambda \vec{n}_1$, la première coordonnée donne $\lambda = \frac{1}{2}$ et la deuxième $1 = -\frac{1}{2}$: impossible, donc $\vec{n}_4$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}_1$. De plus $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_4 = 2 - 1 + 3 = 4 \neq 0$.
Conclusion : P_1 et P_4 ne sont ni parallèles ni perpendiculaires : ils sont sécants suivant une droite.

B8. Un point de d est $(t; 1+t; 2t)$; le vecteur directeur de d est $\vec{u}(1;1;2)$.

- $\mathcal{P}_a : t + (1+t) - 2t - 5 = -4$. L'équation $-4 = 0$ est impossible : d est strictement parallèle à $\mathcal{P}_a$ (aucun point commun). Cohérent avec $\vec{u} \cdot \vec{n}_a = 1 + 1 - 2 = 0$.
- $\mathcal{P}_b : t + (1+t) - 2t - 1 = 0$ pour tout t : d est incluse dans $\mathcal{P}_b$.
- $\mathcal{P}_c : t - (1+t) + 2t - 3 = 2t - 4$. Cette expression s'annule pour $t = 2$: d coupe $\mathcal{P}_c$ au point $(2;3;4)$.
 Vérification : $2 - 3 + 4 - 3 = 0$.

B9.

- $d(A, \mathcal{P}) = \frac{|2 \times 1 - 2 + 2 \times 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$.
- $H = B + k\vec{n}$ a pour coordonnées $(2k; -k; 6 + 2k)$. Comme $H \in \mathcal{P} : 4k + k + 12 + 4k - 3 = 0$, soit $9k + 9 = 0$, donc $k = -1$ et $H(-2; 1; 4)$.
 $BH = |k| \|\vec{n}\| = 1 \times 3 = 3$.
 Formule : $d(B, \mathcal{P}) = \frac{|0 - 0 + 12 - 3|}{3} = 3$. Les deux résultats concordent.
Conclusion : $H(-2; 1; 4)$ et $d(B, \mathcal{P}) = 3$.

B10.

- `ps((1,2,3),(4,-1,0))` renvoie $4 - 2 + 0 = 2$. `orthogonaux((1,2,-1),(3,-1,1))` teste si $3 - 2 - 1 = 0$: il renvoie `True`.
- `AB` vaut $(2, 2, -1)$ et `AC` vaut $(2, -1, 2)$; le produit scalaire vaut $4 - 2 - 2 = 0$: la fonction renvoie `True`. C'est le résultat de l'exercice B3 : ABC est rectangle en A .

3. On complète le programme.

```
def norme(u):
    return sqrt(ps(u, u))
```

```
def distance_plan(M, a, b, c, d):
    return abs(a*M[0] + b*M[1] + c*M[2] + d) / sqrt(a*a + b*b + c*c)
```

Test : `distance_plan((1,2,3), 2, -1, 2, -3)` renvoie $\frac{3}{3} = 1,0$ (exercice B9, question 1).

B11.

1. $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $E(0;0;3)$, $G(3;3;3)$.
2. $\overrightarrow{AG}(3;3;3)$, $\overrightarrow{BD}(-3;3;0)$ et $\overrightarrow{BE}(-3;0;3)$. Ces deux derniers vecteurs ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée de $\overrightarrow{BE}$ est nulle, pas celle de $\overrightarrow{BD}$) et

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = -9 + 9 + 0 = 0, \quad \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = -9 + 0 + 9 = 0.$$

La droite (AG) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BDE) : elle est orthogonale à ce plan, et $\vec{n}(1;1;1)$, colinéaire à $\overrightarrow{AG}$, en est un vecteur normal. Une équation est $x + y + z + d = 0$, et $B \in (BDE)$ donne $3 + d = 0$.

Conclusion : $(BDE) : x + y + z - 3 = 0$. Vérification : $D : 3 - 3 = 0$; $E : 3 - 3 = 0$.

3. Un point de (AG) est $(t; t; t)$. Dans le plan : $3t - 3 = 0$, donc $t = 1$.

Conclusion : $K(1;1;1)$ et $AK = \sqrt{3}$. Comme $K \in (BDE)$ et que $\overrightarrow{AK}$ est colinéaire à $\vec{n}$, K est le projeté orthogonal de A sur (BDE) : $AK = \sqrt{3}$ est la distance de A au plan. Contrôle : $\frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

B12.

1. Par bilinéarité, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$. Par symétrie, $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$, et $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Donc

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

2. $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\|\vec{u}\|^2 + 6\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - 3\|\vec{v}\|^2 = 2 \times 4 + 6 \times (-1) - (-1) - 3 \times 9 = 8 - 6 + 1 - 27 = -24$.
 $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 4 + 2 \times (-1) + 9 = 11$.
 $\|2\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\|\vec{u}\|^2 - 4\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 16 + 4 + 9 = 29$.

3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(36 - 9 - 16) = \frac{11}{2}$. Puis $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2 = 9 - 11 + 16 = 14$.

Conclusion : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{11}{2}$ et $\|\vec{a} - \vec{b}\| = \sqrt{14}$.

4. Les arêtes $[AB]$, $[AD]$, $[AE]$ ont pour longueur 1 : les trois vecteurs sont unitaires. Les faces du cube sont des carrés, donc les arêtes issues de A sont deux à deux perpendiculaires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$. Les trois vecteurs ne sont pas coplanaires. C'est donc une base orthonormée.
 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $(1;1;1)$ et $\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $(-1;1;1)$. Alors $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = -1 + 1 + 1 = 1$ et $AG = BH = \sqrt{3}$. L'angle θ entre les droites vérifie
 $\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH}|}{AG \times BH} = \frac{1}{3}$.