

Fiche 4 : problèmes classiques d'orthogonalité et de distances

Six exercices de synthèse, les grands classiques du chapitre :

- la diagonale d'un cube, un plan, une distance et un volume ;
- un tétraèdre régulier inscrit dans un cube ;
- l'aire d'un triangle dans l'espace ;
- le centre d'une sphère passant par quatre points (points équidistants) ;
- des scripts Python ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- repère orthonormé déclaré, coordonnées écrites ;
- vecteur normal justifié, équation vérifiée ;
- projeté orthogonal et distance recoupés ;
- conclusion en valeur exacte puis approchée.

Comment attaquer un problème d'orthogonalité

1. **Place un repère orthonormé** adapté : sommet du solide comme origine, arêtes comme axes.
2. **Écris les coordonnées** de tous les points utiles.
3. Pour une **orthogonalité**, calcule un **produit scalaire** nul.
4. Pour une **distance à un plan**, cherche l'**équation** du plan (vecteur normal puis un point) puis la **formule**.
5. Pour un **volume**, utilise $\frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$, et recoupe avec une autre base si possible.

Les pièges classiques

- Prendre un repère non orthonormé pour appliquer les formules.
- Confondre distance d'un point à un plan et distance de ce point à un point du plan.
- Oublier de dire que la hauteur d'un tétraèdre est la distance du sommet au **plan de la base**.
- Ne pas vérifier l'équation d'un plan avec **tous** ses points.

Exercice 1 (★★★) : la diagonale d'un cube, un plan, un volume

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1. On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Montrer que (AG) est orthogonale au plan (BDE) et déterminer une équation de ce plan.
2. Déterminer le projeté orthogonal K de A sur (BDE) et la distance de A à ce plan.
3. Calculer l'aire du triangle BDE .
4. En déduire le volume du tétraèdre $ABDE$, puis retrouver ce volume avec la base ABD .
5. Le plan (CFH) a pour équation $x + y + z - 2 = 0$. Calculer la distance entre les plans (BDE) et (CFH) .

Correction de la question 1

$$\overrightarrow{AG}(1; 1; 1), \overrightarrow{BD}(-1; 1; 0), \overrightarrow{BE}(-1; 0; 1).$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 + 1 + 0 = 0 \text{ et } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = -1 + 0 + 1 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires.

(AG) est orthogonale au plan (BDE) , et $\vec{n}(1; 1; 1)$ est un vecteur normal.

Une équation est $x + y + z + d = 0$. Comme $B(1; 0; 0) \in (BDE) : 1 + d = 0$, donc $d = -1$.

$$(BDE) : x + y + z - 1 = 0$$

$$\text{Vérification : } D(0; 1; 0) : 1 - 1 = 0 \text{ et } E(0; 0; 1) : 1 - 1 = 0$$

Correction de la question 2

$$K = A + k\vec{n} = (k; k; k). \text{ Comme } K \in (BDE) : 3k - 1 = 0, \text{ donc } k = \frac{1}{3}.$$

$$K\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{La distance est } AK = |k| \|\vec{n}\| = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

$$d(A, (BDE)) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Contrôle avec la formule : } \frac{|0 + 0 + 0 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Correction de la question 3

$BD = BE = DE = \sqrt{2}$: ce sont des diagonales de faces du cube. Le triangle BDE est équilatéral de côté $\sqrt{2}$.

Son aire est $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2$.

$$\mathcal{A}(BDE) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Correction de la question 4

La hauteur du tétraèdre $ABDE$ issue de A est la distance de A au plan de la base (BDE) , soit $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(BDE) \times AK = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{6}$$

$$V = \frac{1}{6}$$

Avec la base ABD . Le triangle ABD est rectangle isocèle en A : son aire est $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.

La hauteur issue de E est $AE = 1$ (car (AE) est orthogonale au plan (ABD)).

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1$$

$$V = \frac{1}{6}$$

Correction de la question 5

Les plans (BDE) et (CFH) ont pour équations $x + y + z - 1 = 0$ et $x + y + z - 2 = 0$: ils ont le même vecteur normal, donc ils sont parallèles.

$A \in (BDE)$ n'est pas dans le plan (CFH) . Le point $B(1; 0; 0) \in (BDE)$:

$$d = \frac{|1 + 0 + 0 - 2|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

La distance entre les plans est $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Cohérence avec l'exercice du chapitre précédent : la diagonale $[AG]$, de longueur $\sqrt{3}$, est coupée en trois segments égaux de longueur $\frac{\sqrt{3}}{3}$ par les deux plans.

Exercice 2 (★★★) : un tétraèdre régulier dans un cube

Dans le cube d'arête 1 du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on considère le tétraèdre $ACFH$.

1. Montrer que $ACFH$ est un tétraèdre régulier.
2. Montrer que (AF) et (CH) sont orthogonales.
3. Calculer la distance de A au plan (CFH) et le volume de $ACFH$.

Correction de l'exercice 2

Coordonnées : $A(0;0;0)$, $C(1;1;0)$, $F(1;0;1)$, $H(0;1;1)$.

Question 1

Les six arêtes sont des diagonales de faces du cube :

$$AC = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}, AF = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}, AH = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$$

$$CF = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}, CH = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}, FH = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

Toutes les arêtes mesurent $\sqrt{2}$: $ACFH$ est un tétraèdre régulier.

Question 2

$$\overrightarrow{AF}(1;0;1) \text{ et } \overrightarrow{CH}(-1;0;1).$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CH} = -1 + 0 + 1 = 0$$

(AF) et (CH) sont orthogonales (elles ne sont pas sécantes : arêtes opposées).

Question 3

Le plan (CFH) a pour équation $x + y + z - 2 = 0$: $C : 1 + 1 + 0 - 2 = 0$, $F : 1 + 0 + 1 - 2 = 0$, $H : 0 + 1 + 1 - 2 = 0$.

$$d(A, (CFH)) = \frac{|-2|}{\sqrt{3}}$$

$$d(A, (CFH)) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Le triangle CFH est équilatéral de côté $\sqrt{2}$: son aire est $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{6}{6}$$

$$V = \frac{1}{3}$$

Contrôle : le volume du cube (égal à 1) moins les quatre coins $ABCF$, $ACDH$, $AEFH$, $CFGH$, de volume $\frac{1}{6}$ chacun, vaut $1 - \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$

Exercice 3 (★★) : l'aire d'un triangle dans l'espace

On donne $A(1; 2; 0)$, $B(3; 1; -1)$, $C(2; 4; 1)$ (exercice 3 de la fiche 1). Calculer l'aire du triangle ABC .

Correction de l'exercice 3

D'après la fiche 1 : $AB = AC = \sqrt{6}$ et $\cos \widehat{BAC} = -\frac{1}{6}$.

Comme $\widehat{BAC} \in [0; \pi]$, $\sin \widehat{BAC} \geq 0$ et $\sin^2 \widehat{BAC} = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$. Donc $\sin \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{35}}{6}$.

L'aire d'un triangle est $\frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}$:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{35}}{6} = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{35}}{6}$$

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{35}}{2} \approx 2,96$$

$$\text{Formule utile : } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36 - 1}$$

Exercice 4 (★★★) : des points équidistants

On donne $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $D(0; 0; 2)$.

1. Déterminer une équation du plan médiateur de $[AB]$, de $[AC]$ et de $[AD]$.
2. En déduire le point Ω équidistant de A , B , C , D et la distance ΩA .

Correction de l'exercice 4

Question 1

Le plan médiateur de $[AB]$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $MA = MB$, c'est-à-dire $MA^2 = MB^2$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x - 2)^2 + y^2 + z^2$$

$$0 = -4x + 4$$

Plan médiateur de $[AB]$: $x = 1$

De même, $MA^2 = MC^2$ donne $0 = -4y + 4$ et $MA^2 = MD^2$ donne $0 = -4z + 4$.

Plans médiateurs de $[AC]$ et $[AD]$: $y = 1$ et $z = 1$

Question 2

Un point équidistant de A, B, C, D est dans les trois plans médiateurs : $x = 1, y = 1, z = 1$.

$$\Omega(1; 1; 1)$$

La distance est $\Omega A = \sqrt{1 + 1 + 1}$.

$$\Omega A = \sqrt{3}$$

Vérification : $\Omega B = \sqrt{1 + 1 + 1}, \Omega C = \sqrt{3}, \Omega D = \sqrt{3}$. La sphère de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$ passe par les quatre points.

Exercice 5 (★★) : Python

On utilise les fonctions du cours :

```
from math import sqrt, acos, degrees

def produit_scalaire(u, v):
    return u[0]*v[0] + u[1]*v[1] + u[2]*v[2]

def norme(u):
    return sqrt(produit_scalaire(u, u))

def angle(u, v):
    return degrees(acos(produit_scalaire(u, v) / (norme(u) * norme(v))))

def distance_plan(M, a, b, c, d):
    return abs(a*M[0] + b*M[1] + c*M[2] + d) / sqrt(a*a + b*b + c*c)
```

1. Que renvoient `angle((1,2,2), (2,-3,6))` et `distance_plan((2,3,4), 2, -2, 1, -3)` ?

Retrouver ces valeurs par le calcul.

2. Écrire un script qui compte les points à coordonnées entières comprises entre 0 et 2 appartenant au plan $x + y + z - 3 = 0$.

Correction de l'exercice 5

Question 1

`angle((1,2,2), (2,-3,6))` renvoie environ 67.6 : c'est l'angle de l'exercice 2 de la fiche 1 ($\arccos \frac{8}{21} \approx 67,6^\circ$).

`distance_plan((2,3,4), 2, -2, 1, -3)` renvoie environ 0.3333 : c'est $\frac{1}{3}$, la distance de l'exercice 3 de la fiche 3.

Les valeurs du script coïncident avec les calculs.

Question 2

```

from itertools import product

compteur = 0
for (x, y, z) in product(range(3), repeat=3):
    if x + y + z - 3 == 0:
        compteur = compteur + 1
print(compteur)

```

La fonction `product` parcourt les $3^3 = 27$ triplets de $\{0,1,2\}^3$.

Le script affiche 7.

Les points sont $(1,1,1)$ et les six permutations de $(0,1,2)$. On peut le vérifier : $x + y + z = 3$ avec $0 \leq x, y, z \leq 2$ impose soit trois 1, soit un 0, un 1 et un 2.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Les arêtes opposées d'un tétraèdre régulier sont orthogonales.
2. L'aire d'un triangle ABC est $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. Dans un cube, la diagonale $[AG]$ est orthogonale au plan (BDE) .
4. Le volume d'un tétraèdre est la moitié du produit de l'aire de la base par la hauteur.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

C'est le résultat de l'exercice 6 de la fiche 1 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Vrai.

Affirmation 2

Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$ contient un cosinus, alors que l'aire contient un sinus. Contre-exemple : triangle rectangle en A : le produit scalaire est nul, l'aire ne l'est pas.

Faux.

Affirmation 3

C'est la question 1 de l'exercice 1.

Vrai.

Affirmation 4

Le volume est le **tiers** du produit de l'aire de la base par la hauteur (voir l'exercice 1 : $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{6}$).

Faux.

Ce qui peut tomber au bac

- Un **plan défini par un vecteur normal** dans un cube, avec la diagonale (exercice 1).
- Une **distance à un plan** et un **volume** de tétraèdre, avec recoupement (exercices 1 et 2).
- Des **points équidistants** par les plans médiateurs (exercice 4).
- Un **script Python** de produit scalaire, d'angle ou de distance (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Dans un cube d'arête 1, quelle est la distance de A au plan (BDE) d'équation $x + y + z - 1 = 0$?

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (bonne réponse)
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\sqrt{3}$
- D. 1

Justification : $\frac{|-1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

2. Le volume d'un tétraèdre est :

- A. $\frac{1}{2} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$
- B. $\text{aire de la base} \times \text{hauteur}$
- C. $\text{aire de la base} + \text{hauteur}$
- D. $\frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$ (bonne réponse)

Justification : La hauteur est la distance du sommet au plan de la base.

3. Dans un tétraèdre régulier, deux arêtes opposées sont :

- A. **orthogonales** (bonne réponse)
- B. parallèles
- C. sécantes
- D. de longueurs différentes

Justification : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$

4. Pour trouver un point équidistant de plusieurs points, on utilise :

- A. le théorème des valeurs intermédiaires
- B. **l'intersection de leurs plans médiateurs (bonne réponse)**
- C. la formule du binôme
- D. l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Justification : Un point équidistant de A et B est dans le plan médiateur de $[AB]$.

5. L'aire d'un triangle ABC vaut :

- A. $\frac{1}{2}AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$
- B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- C. $AB \times AC$
- D. $\frac{1}{2}AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}$ **(bonne réponse)**

Justification : Le sinus intervient dans l'aire, le cosinus dans le produit scalaire.

6. Dans l'exercice 1, quelle est l'équation du plan (BDE) dans le cube d'arête 1 ?

- A. $x - y + z - 1 = 0$
- B. $x + y + z = 0$
- C. $x + y - z - 1 = 0$
- D. $x + y + z - 1 = 0$ **(bonne réponse)**

Justification : $\vec{n}(1; 1; 1) = \overrightarrow{AG}$ est normal au plan, et $B(1; 0; 0)$ donne $1 + d = 0$, soit $d = -1$.

7. Dans l'exercice 2 (tétraèdre régulier $ACFH$ dans un cube d'arête 1), quelle est la longueur d'une arête ?

- A. $\sqrt{2}$ **(bonne réponse)**
- B. 2
- C. $\sqrt{3}$
- D. 1

Justification : Chaque arête est une diagonale de face du cube, de longueur $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

8. Dans l'exercice 3, quelle est l'aire du triangle ABC avec $A(1; 2; 0)$, $B(3; 1; -1)$, $C(2; 4; 1)$?

- A. $\frac{\sqrt{35}}{2}$ **(bonne réponse)**
- B. $\sqrt{35}$
- C. 6
- D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Justification : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36 - 1} = \frac{\sqrt{35}}{2}$.

9. Dans l'exercice 4, avec $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;2;0)$, $D(0;0;2)$, quel est le point Ω équidistant des quatre points ?

- A. $\Omega(2;2;2)$
- B. $\Omega(1;1;0)$
- C. $\Omega(0,5;0,5;0,5)$
- D. $\Omega(1;1;1)$ (**bonne réponse**)

Justification : Les trois plans médiateurs de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ ont pour équations $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$: leur intersection est $(1;1;1)$.

10. Dans l'exercice 5, le script Python compte les points à coordonnées entières entre 0 et 2 du plan $x + y + z - 3 = 0$. Combien en affiche-t-il ?

- A. 27
- B. 6
- C. 7 (**bonne réponse**)
- D. 9

Justification : Ce sont $(1,1,1)$ et les six permutations de $(0,1,2)$: sept points au total.