

Fiche 3 : intersections, projetés orthogonaux et distances

Huit exercices pour maîtriser les intersections et les distances :

- intersection d'une droite et d'un plan (sécants, parallèles, incluse) ;
- intersection de deux plans ;
- projeté orthogonal d'un point sur un plan, distance ;
- distance d'un point à un plan avec la formule ;
- projeté orthogonal sur une droite, distance à une droite ;
- distance entre deux plans parallèles ;
- la plus courte distance (démonstration) ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- la représentation paramétrique est reportée dans l'équation du plan ;
- le projeté est vérifié dans le plan **et** orthogonal au plan ;
- la distance est calculée de **deux façons** (contrôle) ;
- la conclusion donne la valeur exacte, puis approchée.

Le modèle de rédaction d'un projeté orthogonal

« Le plan P a pour vecteur normal $\vec{n}(2; -2; 1)$.

Le projeté orthogonal H de $M(2; 3; 4)$ sur P est le point de P tel que $\overrightarrow{MH}$ soit colinéaire à $\vec{n}$.

On pose $H = M + k\vec{n} = (2 + 2k; 3 - 2k; 4 + k)$.

Comme $H \in P : 2(2 + 2k) - 2(3 - 2k) + (4 + k) - 3 = 0$, soit $9k - 1 = 0$ et $k = \frac{1}{9}$.

Donc $H \left(\frac{20}{9}; \frac{25}{9}; \frac{37}{9} \right)$.

La distance est $MH = |k| \|\vec{n}\| = \frac{1}{9} \times 3 = \frac{1}{3}$. »

- $H = M + k\vec{n}$, puis $H \in P$ pour trouver k .
- La distance vaut $|k| \times \|\vec{n}\|$: **contrôle-la** avec la formule.

Les pièges classiques

- Oublier la **valeur absolue** dans la formule de distance.
- Oublier $\sqrt{}$ au dénominateur, ou calculer $\|\vec{n}\|^2$ au lieu de $\|\vec{n}\|$.
- Conclure « incluse » sans avoir obtenu $0 = 0$, ou « parallèle » sans avoir obtenu $0 = k \neq 0$.
- Oublier de **reporter** t dans la représentation paramétrique pour obtenir le point.

Un projeté orthogonal, c'est l'ombre d'un point quand le soleil est pile au-dessus du plan. Et la distance, c'est la hauteur de la lampe.

Dans tous les exercices : l'espace est muni d'un repère orthonormé.

Exercice 1 (★★) : intersection d'une droite et d'un plan

Le plan P a pour équation $2x - y + z - 3 = 0$. Étudier l'intersection de P avec chacune des droites :

$$d_1 : x = 1 + t, y = 2t, z = 2 - t$$

$$d_2 : x = t, y = 2t, z = 0$$

$$d_3 : x = t, y = 2t, z = 3$$

Exercice 2 (★★★) : l'intersection de deux plans

On donne $P_1 : x + y + z - 3 = 0$ et $P_2 : x - y + 2z - 2 = 0$.

1. Montrer que P_1 et P_2 sont sécants.
2. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection Δ .
3. Vérifier que le vecteur directeur de Δ est orthogonal aux deux vecteurs normaux.

Exercice 3 (★★) : projeté orthogonal d'un point sur un plan

1. Déterminer le projeté orthogonal H du point $A(2; 3; 4)$ sur le plan $P : 2x - 2y + z - 3 = 0$. Calculer la distance de A à P .
2. Déterminer le projeté orthogonal K du point $M(1; 1; 1)$ sur le plan $Q : 2x + y - z + 3 = 0$. Calculer la distance de M à Q .

Exercice 4 (★★) : la formule de distance

Calculer la distance :

1. de l'origine O au plan $(ABC) : 5x + 3y + 4z - 13 = 0$;
2. du point $B(1; 2; 3)$ au plan $R : x - 2y + 2z - 1 = 0$;
3. du point $C(0; 0; 0)$ au plan $S : 3x - 4z + 10 = 0$.

Exercice 5 (★★) : projeté orthogonal sur une droite

La droite d passe par $A(1; 0; 0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(0; 1; 1)$. Soit $M(2; 3; 1)$.

1. Déterminer le projeté orthogonal H de M sur d .
2. En déduire la distance de M à la droite d .

Exercice 6 (★★) : distance entre deux plans parallèles

Les plans $P : 2x - 2y + z - 3 = 0$ et $P' : 2x - 2y + z + 6 = 0$ sont-ils parallèles ? Calculer leur distance.

Exercice 7 (★★★) : la plus courte distance

Le plan P a pour vecteur normal $\vec{n}$. On note H le projeté orthogonal de M sur P .

1. Montrer que, pour tout point N de P , $MN^2 = MH^2 + HN^2$.
2. En déduire que MH est la plus courte distance de M à un point de P .

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Une droite est parallèle à un plan (ou incluse dans ce plan) si et seulement si son vecteur directeur est orthogonal à un vecteur normal du plan.
2. Deux plans sécants ont un seul point commun.
3. La distance d'un point à un plan est nulle si et seulement si le point appartient au plan.
4. Le projeté orthogonal d'un point du plan sur ce plan est le point lui-même.
5. La formule $\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ donne toujours une distance.

Exercice 9 (★★★) : sphère, plan tangent et droite

Dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1; 2; 3)$ et de rayon 3.

1. Vérifier que $A(3; 4; 4)$ appartient à $\mathcal{S}$ puis déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en A .
2. Déterminer l'intersection de $\mathcal{S}$ avec la droite d_1 de représentation $x = 1 + t, y = 2 + t, z = 1$.
3. Déterminer l'intersection de $\mathcal{S}$ avec la droite d_2 de représentation $x = 1 + t, y = 2 + t, z = 0$.

Exercice 10 (★★) : distance minimale à un plan

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P} : x + 2y + 2z - 3 = 0$ et $A(1; 2; 3)$.

1. Déterminer le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$ et la distance AH .
2. Vérifier que $B(3; 0; 0) \in \mathcal{P}$ et comparer AB à AH . Quel résultat du cours cela illustre-t-il ?

Ce qui peut tomber au bac

- L'intersection d'une droite et d'un plan, avec les trois cas (exercice 1).
- L'intersection de deux plans (exercice 2).
- Un projeté orthogonal avec la distance calculée de deux façons (exercice 3).
- La formule de distance d'un point à un plan (exercice 4).
- Le projeté sur une droite (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est la distance du point $(2; 3; 4)$ au plan d'équation $2x - 2y + z - 3 = 0$?
 - A. 3
 - B. $\frac{1}{3}$
 - C. 1
 - D. $\frac{1}{9}$
2. En remplaçant les coordonnées d'un point de la droite dans l'équation du plan, on obtient $0 = 0$ pour tout t . La droite est :
 - A. strictement parallèle au plan
 - B. incluse dans le plan
 - C. orthogonale au plan
 - D. sécante au plan en un point
3. En remplaçant dans l'équation du plan, on obtient $0 \times t = 3$. La droite est :

- A. sécante au plan en un point
 - B. confondue avec une droite du plan
 - C. strictement parallèle au plan
 - D. incluse dans le plan
4. Le projeté orthogonal H d'un point M sur un plan P est le point de P tel que :
- A. MH soit maximale
 - B. $\overrightarrow{MH}$ soit colinéaire à un vecteur normal du plan
 - C. $\overrightarrow{MH}$ soit dans le plan
 - D. H soit l'origine
5. La distance d'un point M à un plan P est :
- A. toujours nulle
 - B. la plus grande distance de M à un point de P
 - C. la plus courte distance de M à un point de P
 - D. la distance de M à l'origine
6. Dans l'exercice 1, comment est la droite d_2 ($x = t, y = 2t, z = 0$) par rapport au plan $P : 2x - y + z - 3 = 0$?
- A. perpendiculaire
 - B. strictement parallèle
 - C. incluse dans P
 - D. sécante en un point
7. Dans l'exercice 3, quelle est la distance du point $A(2; 3; 4)$ au plan $P : 2x - 2y + z - 3 = 0$?
- A. 3
 - B. $\frac{1}{3}$
 - C. $\frac{1}{9}$
 - D. 1
8. Dans l'exercice 4, quelle est la distance du point $B(1; 2; 3)$ au plan $R : x - 2y + 2z - 1 = 0$?
- A. $\frac{1}{3}$
 - B. $\frac{4}{3}$
 - C. $\frac{2}{3}$
 - D. 2
9. Dans l'exercice 5, quel est le projeté orthogonal H du point $M(2; 3; 1)$ sur la droite d (passant par $A(1; 0; 0)$, dirigée par $(0; 1; 1)$) ?
- A. $H(1; 1; 1)$

B. $H(1; 0; 0)$

C. $H(2; 3; 1)$

D. $H(1; 2; 2)$

10. Dans l'exercice 6, quelle est la distance entre les plans parallèles $P : 2x - 2y + z - 3 = 0$ et $P' : 2x - 2y + z + 6 = 0$?

A. 9

B. 3

C. $\frac{1}{3}$

D. 1