

Fiche 3 : intersections, projetés orthogonaux et distances

Huit exercices pour maîtriser les intersections et les distances :

- intersection d'une droite et d'un plan (sécants, parallèles, incluse) ;
- intersection de deux plans ;
- projeté orthogonal d'un point sur un plan, distance ;
- distance d'un point à un plan avec la formule ;
- projeté orthogonal sur une droite, distance à une droite ;
- distance entre deux plans parallèles ;
- la plus courte distance (démonstration) ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- la représentation paramétrique est reportée dans l'équation du plan ;
- le projeté est vérifié dans le plan **et** orthogonal au plan ;
- la distance est calculée de **deux façons** (contrôle) ;
- la conclusion donne la valeur exacte, puis approchée.

Le modèle de rédaction d'un projeté orthogonal

« Le plan P a pour vecteur normal $\vec{n}(2; -2; 1)$.

Le projeté orthogonal H de $M(2; 3; 4)$ sur P est le point de P tel que $\overrightarrow{MH}$ soit colinéaire à $\vec{n}$.

On pose $H = M + k\vec{n} = (2 + 2k; 3 - 2k; 4 + k)$.

Comme $H \in P : 2(2 + 2k) - 2(3 - 2k) + (4 + k) - 3 = 0$, soit $9k - 1 = 0$ et $k = \frac{1}{9}$.

Donc $H \left(\frac{20}{9}; \frac{25}{9}; \frac{37}{9} \right)$.

La distance est $MH = |k| \|\vec{n}\| = \frac{1}{9} \times 3 = \frac{1}{3}$. »

- $H = M + k\vec{n}$, puis $H \in P$ pour trouver k .
- La distance vaut $|k| \times \|\vec{n}\|$: **contrôle-la** avec la formule.

Les pièges classiques

- Oublier la **valeur absolue** dans la formule de distance.
- Oublier $\sqrt{}$ au dénominateur, ou calculer $\|\vec{n}\|^2$ au lieu de $\|\vec{n}\|$.
- Conclure « incluse » sans avoir obtenu $0 = 0$, ou « parallèle » sans avoir obtenu $0 = k \neq 0$.
- Oublier de **reporter** t dans la représentation paramétrique pour obtenir le point.

Un projeté orthogonal, c'est l'ombre d'un point quand le soleil est pile au-dessus du plan. Et la distance, c'est la hauteur de la lampe.

Dans tous les exercices : l'espace est muni d'un repère orthonormé.

Exercice 1 (★★) : intersection d'une droite et d'un plan

Le plan P a pour équation $2x - y + z - 3 = 0$. Étudier l'intersection de P avec chacune des droites :

$$d_1 : x = 1 + t, y = 2t, z = 2 - t$$

$$d_2 : x = t, y = 2t, z = 0$$

$$d_3 : x = t, y = 2t, z = 3$$

Correction de l'exercice 1

Le vecteur normal à P est $\vec{n}(2; -1; 1)$.

La droite d_1

Le vecteur directeur $\vec{u}_1(1; 2; -1)$ vérifie $\vec{u}_1 \cdot \vec{n} = 2 - 2 - 1 = -1 \neq 0$: d_1 n'est pas parallèle à P .

On remplace dans l'équation de P :

$$2(1 + t) - 2t + (2 - t) - 3 = 0$$

$$2 + 2t - 2t + 2 - t - 3 = 0$$

$$1 - t = 0$$

Donc $t = 1$. On reporte : $x = 2, y = 2, z = 1$.

d_1 coupe P au point $(2; 2; 1)$.

$$\text{Vérification : } 2 \times 2 - 2 + 1 - 3 = 0$$

La droite d_2

Le vecteur directeur $\vec{u}_2(1; 2; 0)$ vérifie $\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 2 - 2 + 0 = 0$: d_2 est parallèle à P . Dans l'équation : $2t - 2t + 0 - 3 = 0$, soit $-3 = 0$: impossible.

d_2 est strictement parallèle à P .

La droite d_3

Le vecteur directeur est le même, $\vec{u}_3 = \vec{u}_2$: d_3 est parallèle à P . Dans l'équation : $2t - 2t + 3 - 3 = 0$, soit $0 = 0$: vrai pour tout t .

d_3 est incluse dans P .

Exercice 2 (★★★) : l'intersection de deux plans

On donne $P_1 : x + y + z - 3 = 0$ et $P_2 : x - y + 2z - 2 = 0$.

1. Montrer que P_1 et P_2 sont sécants.
2. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection Δ .
3. Vérifier que le vecteur directeur de Δ est orthogonal aux deux vecteurs normaux.

Correction de l'exercice 2

Question 1

Les vecteurs normaux $\vec{n}_1(1;1;1)$ et $\vec{n}_2(1;-1;2)$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles).

Les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite.

Question 2

Un point $M(x;y;z)$ est dans les deux plans si et seulement si :

$$x + y + z = 3$$

$$x - y + 2z = 2$$

En additionnant : $2x + 3z = 5$, donc $x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}z$.

En reportant dans la première : $y = 3 - x - z = 3 - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}z - z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z$.

On prend $z = 2s$ comme paramètre :

$$\Delta : x = \frac{5}{2} - 3s, \quad y = \frac{1}{2} + s, \quad z = 2s \quad (s \in \mathbb{R})$$

$$\text{Vérification dans } P_2 : \left(\frac{5}{2} - 3s\right) - \left(\frac{1}{2} + s\right) + 2 \times 2s - 2 = 2 - 4s + 4s - 2 = 0$$

Question 3

Le vecteur directeur de Δ est $\vec{u}(-3;1;2)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_1 = -3 + 1 + 2 = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_2 = -3 - 1 + 4 = 0$$

$\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}_1$ et à $\vec{n}_2$, comme il se doit pour une droite contenue dans les deux plans.

Exercice 3 (★★) : projeté orthogonal d'un point sur un plan

- Déterminer le projeté orthogonal H du point $A(2; 3; 4)$ sur le plan $P : 2x - 2y + z - 3 = 0$. Calculer la distance de A à P .
- Déterminer le projeté orthogonal K du point $M(1; 1; 1)$ sur le plan $Q : 2x + y - z + 3 = 0$. Calculer la distance de M à Q .

Correction de l'exercice 3

Question 1

$\vec{n}(2; -2; 1)$ est normal à P . On pose $H = A + k\vec{n} = (2 + 2k; 3 - 2k; 4 + k)$. Comme $H \in P$:

$$2(2 + 2k) - 2(3 - 2k) + (4 + k) - 3 = 0$$

$$4 + 4k - 6 + 4k + 4 + k - 3 = 0$$

$$9k - 1 = 0$$

$$\text{Donc } k = \frac{1}{9}.$$

$$H \left(\frac{20}{9}; \frac{25}{9}; \frac{37}{9} \right)$$

$$\text{La distance est } AH = |k| \|\vec{n}\| = \frac{1}{9} \times \sqrt{4 + 4 + 1} = \frac{1}{9} \times 3.$$

$$d(A, P) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Contrôle avec la formule : } \frac{|2 \times 2 - 2 \times 3 + 4 - 3|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|-1|}{3} = \frac{1}{3}$$

Question 2

$\vec{n}(2; 1; -1)$ est normal à Q . On pose $K = M + k\vec{n} = (1 + 2k; 1 + k; 1 - k)$. Comme $K \in Q$:

$$2(1 + 2k) + (1 + k) - (1 - k) + 3 = 0$$

$$2 + 4k + 1 + k - 1 + k + 3 = 0$$

$$6k + 5 = 0$$

$$\text{Donc } k = -\frac{5}{6}.$$

$$K\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{11}{6}\right)$$

La distance est $MK = |k| \|\vec{n}\| = \frac{5}{6} \times \sqrt{6}$.

$$d(M, Q) = \frac{5\sqrt{6}}{6} \approx 2,04$$

Contrôle avec la formule : $\frac{|2 + 1 - 1 + 3|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$

Exercice 4 (★★) : la formule de distance

Calculer la distance :

1. de l'origine O au plan $(ABC) : 5x + 3y + 4z - 13 = 0$;
2. du point $B(1; 2; 3)$ au plan $R : x - 2y + 2z - 1 = 0$;
3. du point $C(0; 0; 0)$ au plan $S : 3x - 4z + 10 = 0$.

Correction de l'exercice 4

Méthode

$$d(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Question 1

$$d(O, (ABC)) = \frac{|-13|}{\sqrt{25 + 9 + 16}} = \frac{13}{\sqrt{50}} = \frac{13}{5\sqrt{2}}$$

$$d(O, (ABC)) = \frac{13\sqrt{2}}{10} \approx 1,84$$

Question 2

$$d(B, R) = \frac{|1 - 4 + 6 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{2}{3}$$

$$d(B, R) = \frac{2}{3}$$

Question 3

$$d(C, S) = \frac{|10|}{\sqrt{9 + 0 + 16}} = \frac{10}{5}$$

$$d(C, S) = 2$$

Exercice 5 (★★) : projeté orthogonal sur une droite

La droite d passe par $A(1;0;0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(0;1;1)$. Soit $M(2;3;1)$.

1. Déterminer le projeté orthogonal H de M sur d .
2. En déduire la distance de M à la droite d .

Correction de l'exercice 5

Question 1

Un point de d s'écrit $H(1;t;t)$. On veut $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$. $\overrightarrow{MH}(-1;t-3;t-1)$.

$$\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 \times (-1) + (t-3) + (t-1) = 2t-4$$

$$2t-4=0 \text{ donne } t=2.$$

$$H(1;2;2)$$

Question 2

$$\overrightarrow{MH}(-1;-1;1).$$

$$MH = \sqrt{1+1+1}$$

$$d(M,d) = \sqrt{3}$$

Exercice 6 (★★) : distance entre deux plans parallèles

Les plans $P : 2x - 2y + z - 3 = 0$ et $P' : 2x - 2y + z + 6 = 0$ sont-ils parallèles ? Calculer leur distance.

Correction de l'exercice 6

Les vecteurs normaux sont identiques : $\vec{n}(2;-2;1)$.

P et P' sont parallèles.

Ils ne sont pas confondus : $(0;0;3) \in P$ ($3-3=0$) mais $\notin P'$ ($3+6 \neq 0$).

La distance entre P et P' est la distance d'un point quelconque de P au plan P' . Avec $(0;0;3) \in P$:

$$d = \frac{|0-0+3+6|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{9}{3}$$

La distance entre les plans est 3.

Exercice 7 (★★★) : la plus courte distance

Le plan P a pour vecteur normal $\vec{n}$. On note H le projeté orthogonal de M sur P .

1. Montrer que, pour tout point N de P , $MN^2 = MH^2 + HN^2$.
2. En déduire que MH est la plus courte distance de M à un point de P .

Correction de l'exercice 7

Question 1

D'après Chasles : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HN}$. Donc :

$$MN^2 = \|\overrightarrow{MN}\|^2 = MH^2 + 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HN} + HN^2$$

Le vecteur $\overrightarrow{MH}$ est normal à P , et $\overrightarrow{HN}$ est un vecteur de P (car H et N sont dans P). Donc $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HN} = 0$.

$$MN^2 = MH^2 + HN^2$$

Question 2

Comme $HN^2 \geq 0$, on a $MN^2 \geq MH^2$, donc $MN \geq MH$. L'égalité a lieu si et seulement si $HN = 0$, c'est-à-dire $N = H$.

MH est la plus courte distance de M à un point de P . C'est la distance de M au plan P .

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Une droite est parallèle à un plan (ou incluse dans ce plan) si et seulement si son vecteur directeur est orthogonal à un vecteur normal du plan.
2. Deux plans sécants ont un seul point commun.
3. La distance d'un point à un plan est nulle si et seulement si le point appartient au plan.
4. Le projeté orthogonal d'un point du plan sur ce plan est le point lui-même.
5. La formule $\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ donne toujours une distance.

Correction de l'exercice 8

Affirmation 1

Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, alors $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$, donc parallèle à une base du plan : la droite est parallèle au plan ou incluse. Réciproquement, si $\vec{u}$ est combinaison linéaire d'une base du plan, il est orthogonal à $\vec{n}$.

Vrai.

Affirmation 2

Deux plans sécants ont une droite en commun (exercice 2).

Faux.

Affirmation 3

$d(M, P) = MH = 0 \iff M = H \iff M \in P$. Avec la formule : $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

Vrai.

Affirmation 4

Si $M \in P$, alors $H = M$ vérifie $H \in P$ et $\overrightarrow{MH} = \vec{0}$ orthogonal à P .

Vrai.

Affirmation 5

Sans valeur absolue, le numérateur peut être négatif. Exemple : le point $A(2; 3; 4)$ et le plan $2x - 2y + z - 3 = 0$ donnent $\frac{-1}{3} < 0$.

Faux. Il faut la **valeur absolue**.

Exercice 9 (★★★) : sphère, plan tangent et droite

Dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1; 2; 3)$ et de rayon 3.

1. Vérifier que $A(3; 4; 4)$ appartient à $\mathcal{S}$ puis déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en A .
2. Déterminer l'intersection de $\mathcal{S}$ avec la droite d_1 de représentation $x = 1 + t, y = 2 + t, z = 1$.
3. Déterminer l'intersection de $\mathcal{S}$ avec la droite d_2 de représentation $x = 1 + t, y = 2 + t, z = 0$.

Correction de l'exercice 9

Question 1

$$\Omega A^2 = (3 - 1)^2 + (4 - 2)^2 + (4 - 3)^2 = 4 + 4 + 1 = 9 = 3^2, \text{ donc } A \in \mathcal{S}.$$

$$\overrightarrow{\Omega A} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est normal au plan tangent : } 2(x - 3) + 2(y - 4) + (z - 4) = 0.$$

Le plan tangent en A a pour équation $2x + 2y + z - 18 = 0$.

Question 2

On remplace dans l'équation de $\mathcal{S} : t^2 + t^2 + (1 - 3)^2 = 9 \iff 2t^2 = 5 \iff t = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

d_1 coupe $\mathcal{S}$ en deux points, de paramètres $t = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Question 3

$$t^2 + t^2 + (0 - 3)^2 = 9 \iff 2t^2 = 0 \iff t = 0.$$

Une seule solution : d_2 est tangente à $\mathcal{S}$ au point $(1; 2; 0)$.

Exercice 10 (★★) : distance minimale à un plan

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P} : x + 2y + 2z - 3 = 0$ et $A(1; 2; 3)$.

1. Déterminer le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$ et la distance AH .
2. Vérifier que $B(3; 0; 0) \in \mathcal{P}$ et comparer AB à AH . Quel résultat du cours cela illustre-t-il ?

Correction de l'exercice 10

Question 1

Un vecteur normal est $\vec{n}(1; 2; 2)$, donc $H(1 + t; 2 + 2t; 3 + 2t)$.

$$H \in \mathcal{P} \iff 1 + t + 2(2 + 2t) + 2(3 + 2t) - 3 = 0 \iff 8 + 9t = 0 \iff t = -\frac{8}{9}.$$

$$H\left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}; \frac{11}{9}\right) \text{ et } AH = \frac{8}{9}\|\vec{n}\| = \frac{8}{9} \times 3 = \frac{8}{3}.$$

$$AH = \frac{8}{3} \approx 2,67.$$

Question 2

$3 + 0 + 0 - 3 = 0$ donc $B \in \mathcal{P}$. $AB^2 = (3 - 1)^2 + (0 - 2)^2 + (0 - 3)^2 = 4 + 4 + 9 = 17$, donc $AB \approx 4,12$.

$AB \approx 4,12 > AH \approx 2,67$: le projeté orthogonal est bien le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A .

Ce qui peut tomber au bac

- L'intersection d'une droite et d'un plan, avec les trois cas (exercice 1).
- L'intersection de deux plans (exercice 2).
- Un projeté orthogonal avec la distance calculée de deux façons (exercice 3).
- La formule de distance d'un point à un plan (exercice 4).
- Le projeté sur une droite (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est la distance du point $(2; 3; 4)$ au plan d'équation $2x - 2y + z - 3 = 0$?

- A. 3
- B. $\frac{1}{3}$ (bonne réponse)
- C. 1
- D. $\frac{1}{9}$

Justification : $\frac{|4 - 6 + 4 - 3|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{1}{3}.$

2. En remplaçant les coordonnées d'un point de la droite dans l'équation du plan, on obtient $0 = 0$ pour tout t . La droite est :

- A. strictement parallèle au plan
- B. incluse dans le plan (bonne réponse)
- C. orthogonale au plan
- D. sécante au plan en un point

Justification : Tous les points de la droite vérifient l'équation du plan.

3. En remplaçant dans l'équation du plan, on obtient $0 \times t = 3$. La droite est :

- A. sécante au plan en un point
- B. confondue avec une droite du plan
- C. strictement parallèle au plan (bonne réponse)
- D. incluse dans le plan

Justification : Aucune valeur de t ne convient : la droite ne rencontre pas le plan.

4. Le projeté orthogonal H d'un point M sur un plan P est le point de P tel que :

- A. MH soit maximale
- B. $\overrightarrow{MH}$ soit colinéaire à un vecteur normal du plan (bonne réponse)
- C. $\overrightarrow{MH}$ soit dans le plan
- D. H soit l'origine

Justification : $H \in P$ et $\overrightarrow{MH} \perp P$: on cherche $H = M + k\vec{n}$.

5. La distance d'un point M à un plan P est :

- A. toujours nulle
- B. la plus grande distance de M à un point de P
- C. la plus courte distance de M à un point de P (bonne réponse)
- D. la distance de M à l'origine

Justification : Pour tout $N \in P$, $MN^2 = MH^2 + HN^2 \geq MH^2$.

6. Dans l'exercice 1, comment est la droite d_2 ($x = t$, $y = 2t$, $z = 0$) par rapport au plan $P : 2x - y + z - 3 = 0$?

- A. perpendiculaire
- B. strictement parallèle (bonne réponse)
- C. incluse dans P
- D. sécante en un point

Justification : Le vecteur directeur $(1; 2; 0)$ est orthogonal à $\vec{n}(2; -1; 1)$ (parallèle au plan), mais en substituant on obtient $-3 = 0$, impossible : parallèle sans intersection.

7. Dans l'exercice 3, quelle est la distance du point $A(2; 3; 4)$ au plan $P : 2x - 2y + z - 3 = 0$?

- A. 3
- B. $\frac{1}{3}$ (bonne réponse)
- C. $\frac{1}{9}$
- D. 1

Justification : $d(A, P) = \frac{|4 - 6 + 4 - 3|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|-1|}{3} = \frac{1}{3}$.

8. Dans l'exercice 4, quelle est la distance du point $B(1; 2; 3)$ au plan $R : x - 2y + 2z - 1 = 0$?

- A. $\frac{1}{3}$
- B. $\frac{4}{3}$
- C. $\frac{2}{3}$ (bonne réponse)
- D. 2

Justification : $d(B, R) = \frac{|1 - 4 + 6 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{2}{3}$.

9. Dans l'exercice 5, quel est le projeté orthogonal H du point $M(2; 3; 1)$ sur la droite d (passant par $A(1; 0; 0)$, dirigée par $(0; 1; 1)$) ?

- A. $H(1; 1; 1)$
- B. $H(1; 0; 0)$
- C. $H(2; 3; 1)$

D. $H(1; 2; 2)$ (bonne réponse)

Justification : On cherche t tel que $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$ avec $H = A + t\vec{u}$: on trouve $t = 2$, donc $H(1; 2; 2)$.

10. Dans l'exercice 6, quelle est la distance entre les plans parallèles $P : 2x - 2y + z - 3 = 0$ et $P' : 2x - 2y + z + 6 = 0$?

A. 9

B. 3 (bonne réponse)

C. $\frac{1}{3}$

D. 1

Justification : On prend un point de P , par exemple $(0; 0; 3)$, et on calcule sa distance à P' :

$$\frac{|0 - 0 + 3 + 6|}{3} = 3.$$