

Fiche 2 : vecteurs normaux et équations de plans

Huit exercices pour maîtriser les équations de plans :

- équation d'un plan connaissant un point et un vecteur normal ;
- lire un vecteur normal et des points sur une équation ;
- équation du plan (ABC) ;
- plans parallèles et perpendiculaires, avec un paramètre ;
- plan médiateur ;
- plan perpendiculaire à une droite ;
- plan contenant une droite et un point ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- le vecteur normal est justifié (orthogonal à deux vecteurs non colinéaires) ;
- l'équation est **vérifiée** avec les points donnés ;
- la conclusion nomme la propriété (parallèles, perpendiculaires...).

Le modèle de rédaction de l'équation du plan (ABC)

« $\overrightarrow{AB}(1;1;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;3;-1)$ ne sont pas colinéaires : A, B, C définissent un plan. Cherchons un vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donnent

$$a + b - 2c = 0 \text{ et } -a + 3b - c = 0.$$

En ajoutant : $4b - 3c = 0$.

Pour $c = 4$, $b = 3$ et $a = 2c - b = 5$.

Donc $\vec{n}(5;3;4)$.

Le plan a une équation de la forme $5x + 3y + 4z + d = 0$.

Comme $A(1;0;2)$ est dans le plan, $5 + 8 + d = 0$, donc $d = -13$.

Vérification : $B : 10 + 3 + 0 - 13 = 0$; $C : 0 + 9 + 4 - 13 = 0$. »

Les pièges classiques

- Oublier de **vérifier** l'équation avec les trois points.
- Se tromper de signe dans $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.
- Oublier que **tout multiple non nul** d'un vecteur normal convient : l'équation d'un plan n'est pas unique.
- Utiliser $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ avec un repère non orthonormé.

Un plan a une infinité d'équations, comme une personne a une infinité de façons de dire bonjour.
Pense à toutes les vérifier avec les mêmes points.

Dans tous les exercices : l'espace est muni d'un repère orthonormé.

Exercice 1 (★) : un point et un vecteur normal

Le plan P passe par $A(1; -2; 3)$ et a pour vecteur normal $\vec{n}(2; 1; -1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de P .
2. Les points $B(0; 1; 4)$ et $C(1; 1; 1)$ appartiennent-ils à P ?

Exercice 2 (★) : lire une équation de plan

Le plan P a pour équation $3x - y + 2z - 6 = 0$.

1. Donner un vecteur normal à P .
2. Déterminer trois points de P , puis deux vecteurs non colinéaires de P , et vérifier qu'ils sont orthogonaux au vecteur normal.
3. Le point $D(2; 1; 2)$ appartient-il à P ?

Exercice 3 (★★) : le plan (ABC)

On donne $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(0; 3; 1)$.

1. Montrer que A , B , C ne sont pas alignés.
2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC) puis une équation cartésienne de ce plan.
3. Vérifier l'équation avec B et C .

Exercice 4 (★★) : plans parallèles et perpendiculaires

1. Déterminer une équation du plan passant par $D(1;1;1)$ et parallèle au plan P d'équation $2x - y + 3z - 5 = 0$.
2. Déterminer m pour que les plans $P_1 : 2x + y - z + 1 = 0$ et $P_2 : x - 3y + mz = 0$ soient perpendiculaires.
3. Les plans P_1 et $P_3 : 4x + 2y - 2z + 7 = 0$ sont-ils parallèles ? confondus ?

Exercice 5 (★★) : le plan médiateur

On donne $A(1;2;3)$ et $B(3;0;-1)$.

1. Déterminer une équation du plan médiateur de $[AB]$.
2. Vérifier que le point $M(0;1;0)$ est dans ce plan, et que $MA = MB$.

Exercice 6 (★★) : un plan perpendiculaire à une droite

La droite d a pour représentation paramétrique $x = 2 + t, y = 1 - t, z = 3t$ ($t \in \mathbb{R}$).

1. Déterminer une équation du plan P passant par $K(1;1;2)$ et orthogonal à d .
2. Le point $L(3;0;1)$ appartient-il à P ?

Exercice 7 (★★★) : un plan contenant une droite et un point

La droite d passe par $A(1;0;0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1;1;0)$. On donne $C(0;0;2)$.

Déterminer une équation du plan Q contenant d et C .

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Un plan a une seule équation cartésienne.
2. Le vecteur $\vec{n}(1;2;3)$ est normal au plan d'équation $x + 2y + 3z = 5$.
3. Les plans $x + y + z = 1$ et $x - y = 0$ sont perpendiculaires.
4. Le plan d'équation $x = 2$ est parallèle au plan (yOz) .
5. Deux plans perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

Ce qui peut tomber au bac

- L'équation d'un plan à partir d'un point et d'un vecteur normal (exercices 1 et 6).
- Lire un vecteur normal et des points sur une équation (exercice 2).
- L'équation du plan (ABC) avec vérification (exercice 3).
- Des plans parallèles ou perpendiculaires, avec un paramètre (exercice 4).
- Un plan médiateur (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

- Quelle est une équation du plan passant par $A(1; -2; 3)$ de vecteur normal $\vec{n}(2; 1; -1)$?
 - $x - 2y + 3z = 0$
 - $2x + y - z - 3 = 0$
 - $2x + y - z = 0$
 - $2x + y - z + 3 = 0$
- Quel est un vecteur normal au plan d'équation $3x - y + 2z - 6 = 0$?
 - $\vec{n}(1; 1; 1)$
 - $\vec{n}(3; -1; 2)$
 - $\vec{n}(-6; 1; -2)$
 - $\vec{n}(3; 1; 2)$
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si :
 - ils passent par l'origine
 - ils ont le même vecteur normal
 - leurs vecteurs normaux sont colinéaires
 - leurs vecteurs normaux sont orthogonaux
- Les plans $2x + y - z + 1 = 0$ et $4x + 2y - 2z + 7 = 0$ sont :
 - strictement parallèles
 - confondus
 - sécants
 - perpendiculaires
- Le plan médiateur de $[AB]$ est le plan :
 - de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ passant par le milieu de $[AB]$
 - de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ passant par A
 - contenant la droite (AB)
 - parallèle à (AB)

6. Dans l'exercice 1, quelle est l'équation du plan P passant par $A(1; -2; 3)$ de vecteur normal $\vec{n}(2; 1; -1)$?
- A. $2x + y - z = 0$
 - B. $x - 2y + 3z = 0$
 - C. $2x + y - z + 3 = 0$
 - D. $2x + y - z - 3 = 0$
7. Dans l'exercice 3, quel vecteur normal trouve-t-on pour le plan (ABC) avec $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(0; 3; 1)$?
- A. $\vec{n}(5; 3; 4)$
 - B. $\vec{n}(2; 1; 0)$
 - C. $\vec{n}(5; 3; 13)$
 - D. $\vec{n}(1; 1; -2)$
8. Dans l'exercice 4, pour quelle valeur de m les plans $P_1 : 2x + y - z + 1 = 0$ et $P_2 : x - 3y + mz = 0$ sont-ils perpendiculaires ?
- A. $m = -1$
 - B. $m = 2$
 - C. $m = 1$
 - D. $m = 3$
9. Dans l'exercice 5, quelle est l'équation du plan médiateur de $[AB]$ avec $A(1; 2; 3)$ et $B(3; 0; -1)$?
- A. $x - y - 2z = 0$
 - B. $x + y + 2z - 1 = 0$
 - C. $2x - 2y - 4z + 1 = 0$
 - D. $x - y - 2z + 1 = 0$
10. Dans l'exercice 7, quelle est l'équation du plan Q contenant la droite d (passant par $A(1; 0; 0)$, dirigée par $(1; 1; 0)$) et le point $C(0; 0; 2)$?
- A. $2x - 2y + z - 2 = 0$
 - B. $2x - 2y + z = 0$
 - C. $x + y + z - 1 = 0$
 - D. $x - y + 2z - 1 = 0$