

Fiche 2 : vecteurs normaux et équations de plans

Huit exercices pour maîtriser les équations de plans :

- équation d'un plan connaissant un point et un vecteur normal ;
- lire un vecteur normal et des points sur une équation ;
- équation du plan (ABC) ;
- plans parallèles et perpendiculaires, avec un paramètre ;
- plan médiateur ;
- plan perpendiculaire à une droite ;
- plan contenant une droite et un point ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- le vecteur normal est justifié (orthogonal à deux vecteurs non colinéaires) ;
- l'équation est **vérifiée** avec les points donnés ;
- la conclusion nomme la propriété (parallèles, perpendiculaires...).

Le modèle de rédaction de l'équation du plan (ABC)

« $\overrightarrow{AB}(1;1;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;3;-1)$ ne sont pas colinéaires : A, B, C définissent un plan. Cherchons un vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donnent

$$a + b - 2c = 0 \text{ et } -a + 3b - c = 0.$$

En ajoutant : $4b - 3c = 0$.

Pour $c = 4$, $b = 3$ et $a = 2c - b = 5$.

Donc $\vec{n}(5;3;4)$.

Le plan a une équation de la forme $5x + 3y + 4z + d = 0$.

Comme $A(1;0;2)$ est dans le plan, $5 + 8 + d = 0$, donc $d = -13$.

Vérification : $B : 10 + 3 + 0 - 13 = 0$; $C : 0 + 9 + 4 - 13 = 0$. »

Les pièges classiques

- Oublier de **vérifier** l'équation avec les trois points.
- Se tromper de signe dans $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.
- Oublier que **tout multiple non nul** d'un vecteur normal convient : l'équation d'un plan n'est pas unique.
- Utiliser $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ avec un repère non orthonormé.

Un plan a une infinité d'équations, comme une personne a une infinité de façons de dire bonjour.
Pense à toutes les vérifier avec les mêmes points.

Dans tous les exercices : l'espace est muni d'un repère orthonormé.

Exercice 1 (★) : un point et un vecteur normal

Le plan P passe par $A(1; -2; 3)$ et a pour vecteur normal $\vec{n}(2; 1; -1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de P .
2. Les points $B(0; 1; 4)$ et $C(1; 1; 1)$ appartiennent-ils à P ?

Correction de l'exercice 1

Question 1

$M(x; y; z) \in P \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Une équation de P est de la forme $2x + y - z + d = 0$.
Comme $A \in P : 2 \times 1 + (-2) - 3 + d = 0$, donc $d = 3$.

$$P : 2x + y - z + 3 = 0$$

Question 2

Pour $B : 2 \times 0 + 1 - 4 + 3 = 0$.

$B \in P$.

Pour $C : 2 \times 1 + 1 - 1 + 3 = 5 \neq 0$.

$C \notin P$.

Exercice 2 (★) : lire une équation de plan

Le plan P a pour équation $3x - y + 2z - 6 = 0$.

1. Donner un vecteur normal à P .
2. Déterminer trois points de P , puis deux vecteurs non colinéaires de P , et vérifier qu'ils sont orthogonaux au vecteur normal.
3. Le point $D(2; 1; 2)$ appartient-il à P ?

Correction de l'exercice 2

Question 1

$\vec{n}(3; -1; 2)$ est un vecteur normal à P .

Question 2

On cherche des points en annulant deux coordonnées :

$y = z = 0 : 3x = 6$ donc $A(2; 0; 0) \in P$.

$x = z = 0 : -y = 6$ donc $B(0; -6; 0) \in P$.

$x = y = 0 : 2z = 6$ donc $C(0; 0; 3) \in P$.

$\overrightarrow{AB}(-2; -6; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-2; 0; 3)$ ne sont pas colinéaires.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times (-2) + (-1) \times (-6) + 0 = -6 + 6 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-2) + 0 + 2 \times 3 = -6 + 6 = 0$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P : c'est bien un vecteur normal.

Question 3

$$3 \times 2 - 1 + 2 \times 2 - 6 = 6 - 1 + 4 - 6 = 3 \neq 0.$$

$D \notin P$.

Exercice 3 (★★) : le plan (ABC)

On donne $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(0; 3; 1)$.

1. Montrer que A , B , C ne sont pas alignés.
2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC) puis une équation cartésienne de ce plan.
3. Vérifier l'équation avec B et C .

Correction de l'exercice 3

Question 1

$\overrightarrow{AB}(1;1;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;3;-1)$. Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

A, B, C ne sont pas alignés.

Question 2

On cherche $\vec{n}(a;b;c)$ tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$:

$$a + b - 2c = 0$$

$$-a + 3b - c = 0$$

En additionnant les deux équations : $4b - 3c = 0$. On choisit $c = 4$: $b = 3$, puis $a = 2c - b = 8 - 3 = 5$.

$\vec{n}(5;3;4)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

Une équation est $5x + 3y + 4z + d = 0$. Comme $A(1;0;2)$ est dans le plan : $5 + 0 + 8 + d = 0$, donc $d = -13$.

$$(ABC) : 5x + 3y + 4z - 13 = 0$$

Question 3

Pour $B(2;1;0)$: $10 + 3 + 0 - 13 = 0$.

Pour $C(0;3;1)$: $0 + 9 + 4 - 13 = 0$.

Les trois points vérifient l'équation.

Exercice 4 (★★) : plans parallèles et perpendiculaires

1. Déterminer une équation du plan passant par $D(1;1;1)$ et parallèle au plan P d'équation $2x - y + 3z - 5 = 0$.
2. Déterminer m pour que les plans $P_1 : 2x + y - z + 1 = 0$ et $P_2 : x - 3y + mz = 0$ soient perpendiculaires.
3. Les plans P_1 et $P_3 : 4x + 2y - 2z + 7 = 0$ sont-ils parallèles ? confondus ?

Correction de l'exercice 4

Question 1

Deux plans parallèles ont des vecteurs normaux colinéaires. On prend le même $\vec{n}(2;-1;3)$.

Une équation est $2x - y + 3z + d = 0$. Comme $D \in \text{plan}$: $2 - 1 + 3 + d = 0$, donc $d = -4$.

$$2x - y + 3z - 4 = 0$$

Question 2

Les vecteurs normaux sont $\vec{n}_1(2; 1; -1)$ et $\vec{n}_2(1; -3; m)$. Les plans sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$:

$$2 - 3 - m = 0$$

$$m = -1$$

Question 3

$\vec{n}_3(4; 2; -2) = 2\vec{n}_1$: les vecteurs normaux sont colinéaires.

Les plans P_1 et P_3 sont parallèles.

Le point $(0; 0; 1)$ est dans P_1 ($-1 + 1 = 0$). Dans P_3 : $-2 + 7 = 5 \neq 0$.

Les plans ne sont pas confondus : ils sont strictement parallèles.

Exercice 5 (★★) : le plan médiateur

On donne $A(1; 2; 3)$ et $B(3; 0; -1)$.

- Déterminer une équation du plan médiateur de $[AB]$.
- Vérifier que le point $M(0; 1; 0)$ est dans ce plan, et que $MA = MB$.

Correction de l'exercice 5

Question 1

Le plan médiateur passe par le milieu I de $[AB]$ et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

$$I\left(\frac{1+3}{2}; \frac{2+0}{2}; \frac{3-1}{2}\right) = (2; 1; 1)$$

$$\overrightarrow{AB}(2; -2; -4). \text{ On peut prendre } \vec{n}(1; -1; -2) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Une équation est $x - y - 2z + d = 0$. Comme $I \in \text{plan}$: $2 - 1 - 2 + d = 0$, donc $d = 1$.

$$x - y - 2z + 1 = 0$$

Question 2

$$M(0; 1; 0) : 0 - 1 - 0 + 1 = 0.$$

M est dans le plan médiateur.

$$MA^2 = (1-0)^2 + (2-1)^2 + (3-0)^2 = 1 + 1 + 9 = 11$$

$$MB^2 = (3-0)^2 + (0-1)^2 + (-1-0)^2 = 9 + 1 + 1 = 11$$

$$MA = MB.$$

Exercice 6 (★★) : un plan perpendiculaire à une droite

La droite d a pour représentation paramétrique $x = 2 + t, y = 1 - t, z = 3t$ ($t \in \mathbb{R}$).

1. Déterminer une équation du plan P passant par $K(1; 1; 2)$ et orthogonal à d .
2. Le point $L(3; 0; 1)$ appartient-il à P ?

Correction de l'exercice 6

Question 1

Le plan est orthogonal à d si et seulement si le vecteur directeur de d est un vecteur normal du plan. Donc $\vec{n}(1; -1; 3)$.

Une équation est $x - y + 3z + d = 0$. Comme $K \in P : 1 - 1 + 6 + d = 0$, donc $d = -6$.

$$P : x - y + 3z - 6 = 0$$

Question 2

$$3 - 0 + 3 \times 1 - 6 = 0.$$

$$L \in P.$$

Exercice 7 (★★★) : un plan contenant une droite et un point

La droite d passe par $A(1; 0; 0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; 0)$. On donne $C(0; 0; 2)$.

Déterminer une équation du plan Q contenant d et C .

Correction de l'exercice 7

Le plan Q est dirigé par $\vec{u}(1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 0; 2)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

On cherche $\vec{n}(a; b; c)$ orthogonal aux deux :

$$a + b = 0$$

$$-a + 2c = 0$$

On choisit $c = 1 : a = 2$ et $b = -2$. Donc $\vec{n}(2; -2; 1)$.

Une équation est $2x - 2y + z + d = 0$. Comme $A \in Q : 2 + d = 0$, donc $d = -2$.

$$Q : 2x - 2y + z - 2 = 0$$

Vérification. Pour $C(0;0;2) : 0 - 0 + 2 - 2 = 0$. Pour le point de d obtenu avec $t = 1$, $(2;1;0) : 4 - 2 + 0 - 2 = 0$.

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Un plan a une seule équation cartésienne.
2. Le vecteur $\vec{n}(1;2;3)$ est normal au plan d'équation $x + 2y + 3z = 5$.
3. Les plans $x + y + z = 1$ et $x - y = 0$ sont perpendiculaires.
4. Le plan d'équation $x = 2$ est parallèle au plan (yOz) .
5. Deux plans perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

Correction de l'exercice 8

Affirmation 1

$x + y + z = 1$ et $2x + 2y + 2z = 2$ décrivent le même plan.

Faux. Elle est unique à un facteur non nul près.

Affirmation 2

Le plan a pour équation $x + 2y + 3z - 5 = 0$: le vecteur normal est $(1;2;3)$.

Vrai.

Affirmation 3

Les vecteurs normaux sont $(1;1;1)$ et $(1;-1;0)$. Produit scalaire : $1 - 1 + 0 = 0$.

Vrai.

Affirmation 4

Le plan (yOz) a pour équation $x = 0$, de vecteur normal $(1;0;0)$, comme le plan $x = 2$.

Vrai.

Affirmation 5

Contre-exemple : les plans (xOz) ($y = 0$) et (yOz) ($x = 0$) sont tous deux perpendiculaires à (xOy) ($z = 0$), mais ils sont sécants.

Faux.

Ce qui peut tomber au bac

- L'équation d'un plan à partir d'un point et d'un vecteur normal (exercices 1 et 6).
- Lire un vecteur normal et des points sur une équation (exercice 2).
- L'équation du plan (ABC) avec vérification (exercice 3).
- Des plans parallèles ou perpendiculaires, avec un paramètre (exercice 4).
- Un plan médiateur (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est une équation du plan passant par $A(1; -2; 3)$ de vecteur normal $\vec{n}(2; 1; -1)$?

- A. $x - 2y + 3z = 0$
- B. $2x + y - z - 3 = 0$
- C. $2x + y - z = 0$
- D. $2x + y - z + 3 = 0$ (bonne réponse)

Justification : $2x + y - z + d = 0$ et A donne $2 - 2 - 3 + d = 0$, donc $d = 3$.

2. Quel est un vecteur normal au plan d'équation $3x - y + 2z - 6 = 0$?

- A. $\vec{n}(1; 1; 1)$
- B. $\vec{n}(3; -1; 2)$ (bonne réponse)
- C. $\vec{n}(-6; 1; -2)$
- D. $\vec{n}(3; 1; 2)$

Justification : Les coefficients de x, y, z donnent un vecteur normal.

3. Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si :

- A. ils passent par l'origine
- B. ils ont le même vecteur normal
- C. leurs vecteurs normaux sont colinéaires
- D. leurs vecteurs normaux sont orthogonaux (bonne réponse)

Justification : Perpendiculaires : $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$. Parallèles : $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ colinéaires.

4. Les plans $2x + y - z + 1 = 0$ et $4x + 2y - 2z + 7 = 0$ sont :

- A. strictement parallèles (bonne réponse)
- B. confondus
- C. sécants
- D. perpendiculaires

Justification : Normaux colinéaires ($\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$) et $(0; 0; 1)$ est dans le premier mais pas dans le second.

5. Le plan médiateur de $[AB]$ est le plan :

- A. de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ passant par le milieu de $[AB]$ (bonne réponse)
- B. de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ passant par A
- C. contenant la droite (AB)
- D. parallèle à (AB)

Justification : C'est l'ensemble des points M tels que $MA = MB$.

6. Dans l'exercice 1, quelle est l'équation du plan P passant par $A(1; -2; 3)$ de vecteur normal $\vec{n}(2; 1; -1)$?

- A. $2x + y - z = 0$
- B. $x - 2y + 3z = 0$
- C. $2x + y - z + 3 = 0$ (bonne réponse)
- D. $2x + y - z - 3 = 0$

Justification : Une équation est $2x + y - z + d = 0$; en remplaçant avec A : $2 - 2 - 3 + d = 0$, donc $d = 3$.

7. Dans l'exercice 3, quel vecteur normal trouve-t-on pour le plan (ABC) avec $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(0; 3; 1)$?

- A. $\vec{n}(5; 3; 4)$ (bonne réponse)
- B. $\vec{n}(2; 1; 0)$
- C. $\vec{n}(5; 3; 13)$
- D. $\vec{n}(1; 1; -2)$

Justification : On résout $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, ce qui donne (après un choix de paramètre) $\vec{n}(5; 3; 4)$.

8. Dans l'exercice 4, pour quelle valeur de m les plans $P_1 : 2x + y - z + 1 = 0$ et $P_2 : x - 3y + mz = 0$ sont-ils perpendiculaires ?

- A. $m = -1$ (bonne réponse)
- B. $m = 2$
- C. $m = 1$
- D. $m = 3$

Justification : $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ donne $2 - 3 - m = 0$, donc $m = -1$.

9. Dans l'exercice 5, quelle est l'équation du plan médiateur de $[AB]$ avec $A(1; 2; 3)$ et $B(3; 0; -1)$?

- A. $x - y - 2z = 0$
- B. $x + y + 2z - 1 = 0$
- C. $2x - 2y - 4z + 1 = 0$

D. $x - y - 2z + 1 = 0$ (bonne réponse)

Justification : Le vecteur normal est $\overrightarrow{AB}(2; -2; -4)$, simplifié en $(1; -1; -2)$; l'équation passe par le milieu $I(2; 1; 1)$ de $[AB]$.

10. Dans l'exercice 7, quelle est l'équation du plan Q contenant la droite d (passant par $A(1; 0; 0)$, dirigée par $(1; 1; 0)$) et le point $C(0; 0; 2)$?

A. $2x - 2y + z - 2 = 0$ (bonne réponse)

B. $2x - 2y + z = 0$

C. $x + y + z - 1 = 0$

D. $x - y + 2z - 1 = 0$

Justification : On cherche $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}(1; 1; 0)$ et à $\overrightarrow{AC}(-1; 0; 2)$, ce qui donne $\vec{n}(2; -2; 1)$, puis l'équation avec A .