

Fiche 1 : produit scalaire, norme et angles

Huit exercices pour maîtriser le produit scalaire dans l'espace :

- calculs de produits scalaires, de normes, recherche d'un paramètre ;
- angles entre vecteurs ;
- nature d'un triangle dans l'espace ;
- angles et orthogonalité dans un cube ;
- identités sur les normes ;
- arêtes opposées d'un tétraèdre régulier ;
- produit scalaire avec un projeté orthogonal ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- le repère est déclaré **orthonormé** ;
- la formule utilisée est citée ;
- les coordonnées des vecteurs sont écrites ;
- la valeur exacte est donnée, puis la valeur approchée de l'angle ;
- la conclusion nomme la propriété.

Le modèle de rédaction d'un angle

« Dans le repère orthonormé, $\vec{u}(1; 1; 0)$ et $\vec{v}(0; 1; 1)$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1$. $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$. Donc $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. Comme $\theta \in [0; \pi]$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, soit 60° . »

- Écris que le repère est **orthonormé**.
- Calcule **produit scalaire** puis **normes**, avant le cosinus.
- Donne θ **exact** quand c'est possible, sinon une **valeur approchée** au dixième de degré.

Les pièges classiques

- Utiliser les formules dans un repère non orthonormé.
- Écrire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$: c'est le **nombre 0**.
- Oublier la racine dans $\|\vec{u}\|$, ou le produit des normes au dénominateur.
- Conclure « droites perpendiculaires » alors qu'on a seulement montré l'**orthogonalité** (elles peuvent être non coplanaires).

Un produit scalaire nul ne veut pas dire qu'un des vecteurs est nul. C'est la géométrie qui est polie : elle sait dire non sans se fâcher.

Dans tous les exercices : l'espace est muni d'un repère orthonormé.

Exercice 1 (★) : produits scalaires et normes

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u}(1; 2; 3)$ et $\vec{v}(4; -1; 0)$.
2. Calculer les normes de $\vec{a}(2; -1; 2)$ et de $\vec{u}(1; 2; 3)$.
3. Montrer que $\vec{p}(1; -2; 3)$ et $\vec{q}(2; 1; 0)$ sont orthogonaux.
4. Déterminer m pour que $\vec{u}(m; 2; 1)$ et $\vec{v}(1; -3; 4)$ soient orthogonaux.

Exercice 2 (★★) : calculer un angle

Calculer l'angle géométrique θ entre :

1. $\vec{u}(1; 1; 0)$ et $\vec{v}(0; 1; 1)$
2. $\vec{a}(1; 2; 2)$ et $\vec{b}(2; -3; 6)$

Exercice 3 (★★) : la nature d'un triangle

On donne $A(1; 2; 0)$, $B(3; 1; -1)$, $C(2; 4; 1)$.

1. Calculer les longueurs AB , AC , BC .
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC}$.
3. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 4 (★★) : angles et orthogonalité dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, avec le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Calculer une valeur approchée de l'angle entre $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$.
2. Calculer l'angle $\widehat{FAH}$.
3. Montrer que (AG) est orthogonale à (BD) et à (BE) . Que peut-on en déduire pour la droite (AG) et le plan (BDE) ?

Exercice 5 (★★) : identités sur les normes

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.

Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$, $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$, $\|2\vec{u} - \vec{v}\|^2$, puis l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 6 (★★★) : les arêtes opposées d'un tétraèdre régulier

$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a : toutes ses arêtes mesurent a .

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CD) ?

Exercice 7 (★★) : produit scalaire et projeté orthogonal

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, avec le repère de l'exercice 4 :

1. Quel est le projeté orthogonal de G sur la droite (AB) ? En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.
2. Quel est le projeté orthogonal de G sur la droite (AC) ? En déduire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG}$.
3. Vérifier ces deux résultats avec les coordonnées.

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\vec{v} = \vec{w}$.
2. Pour tous vecteurs, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.
3. Deux droites orthogonales sont sécantes.
4. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
5. Pour tous vecteurs, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Ce qui peut tomber au bac

- Des **produits scalaires**, normes et **orthogonalités** en coordonnées (exercices 1 et 4).
- Le calcul d'un **angle** avec sa valeur approchée (exercices 2 et 3).
- Une **identité** avec Chasles et la bilinéarité (exercices 5 et 6).
- Le **projeté orthogonal** comme aide au calcul (exercice 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Que vaut $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u}(1; 2; 3)$ et $\vec{v}(4; -1; 0)$ dans un repère orthonormé ?
 A. 2
 B. 6

- C. 0
- D. 8
2. Quelle est la norme de $\vec{u}(2; -1; 2)$ dans un repère orthonormé ?
- A. 5
- B. 2
- C. 3
- D. 9
3. Les vecteurs $\vec{u}(1; -2; 3)$ et $\vec{v}(2; 1; 0)$ sont :
- A. orthogonaux
- B. colinéaires
- C. de même norme
- D. égaux
4. Quel est le cosinus de l'angle entre $\vec{u}(1; 1; 0)$ et $\vec{v}(0; 1; 1)$?
- A. $\frac{1}{2}$
- B. 1
- C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- D. 0
5. Dans un repère non orthonormé, la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$:
- A. donne toujours 0
- B. donne le produit vectoriel
- C. reste valable
- D. n'est pas valable
6. Dans l'exercice 2, quel est l'angle géométrique entre $\vec{u}(1; 1; 0)$ et $\vec{v}(0; 1; 1)$?
- A. 45°
- B. 60°
- C. 90°
- D. 30°
7. Dans l'exercice 3, quelle est la nature du triangle ABC avec $A(1; 2; 0)$, $B(3; 1; -1)$, $C(2; 4; 1)$?
- A. rectangle en A
- B. isocèle en A , avec un angle obtus en A
- C. équilatéral
- D. isocèle et rectangle
8. Dans l'exercice 4, l'angle entre $\overrightarrow{AG}$ (diagonale du cube) et $\overrightarrow{AB}$ vaut environ :

- A. 45°
- B. 60°
- C. 90°
- D. $54,7^\circ$

9. Dans l'exercice 6 (tétraèdre régulier d'arête a), que vaut $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$?

- A. $\frac{a^2}{2}$
- B. a^2
- C. 0
- D. $\frac{a^2}{4}$

10. Dans l'exercice 7, quel est le projeté orthogonal de G sur la droite (AB) , dans le cube d'arête 1 ?

- A. B
- B. le milieu de $[AB]$
- C. A
- D. C