

# Fiche 1 : produit scalaire, norme et angles

Huit exercices pour maîtriser le produit scalaire dans l'espace :

- calculs de produits scalaires, de normes, recherche d'un paramètre ;
- angles entre vecteurs ;
- nature d'un triangle dans l'espace ;
- angles et orthogonalité dans un cube ;
- identités sur les normes ;
- arêtes opposées d'un tétraèdre régulier ;
- produit scalaire avec un projeté orthogonal ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- le repère est déclaré **orthonormé** ;
- la formule utilisée est citée ;
- les coordonnées des vecteurs sont écrites ;
- la valeur exacte est donnée, puis la valeur approchée de l'angle ;
- la conclusion nomme la propriété.

## Le modèle de rédaction d'un angle

« Dans le repère orthonormé,  $\vec{u}(1; 1; 0)$  et  $\vec{v}(0; 1; 1)$ .  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1$ .  $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$  et  $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ . Donc  $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ . Comme  $\theta \in [0; \pi]$ ,  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , soit  $60^\circ$ . »

- Écris que le repère est **orthonormé**.
- Calcule **produit scalaire** puis **normes**, avant le cosinus.
- Donne  $\theta$  **exact** quand c'est possible, sinon une **valeur approchée** au dixième de degré.

## Les pièges classiques

- Utiliser les formules dans un repère non orthonormé.
- Écrire  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$  : c'est le **nombre 0**.
- Oublier la racine dans  $\|\vec{u}\|$ , ou le produit des normes au dénominateur.
- Conclure « droites perpendiculaires » alors qu'on a seulement montré l'**orthogonalité** (elles peuvent être non coplanaires).

Un produit scalaire nul ne veut pas dire qu'un des vecteurs est nul. C'est la géométrie qui est polie : elle sait dire non sans se fâcher.

Dans tous les exercices : l'espace est muni d'un repère orthonormé.

**Exercice 1 (★) : produits scalaires et normes**

1. Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  pour  $\vec{u}(1; 2; 3)$  et  $\vec{v}(4; -1; 0)$ .
2. Calculer les normes de  $\vec{a}(2; -1; 2)$  et de  $\vec{u}(1; 2; 3)$ .
3. Montrer que  $\vec{p}(1; -2; 3)$  et  $\vec{q}(2; 1; 0)$  sont orthogonaux.
4. Déterminer  $m$  pour que  $\vec{u}(m; 2; 1)$  et  $\vec{v}(1; -3; 4)$  soient orthogonaux.

**Correction de l'exercice 1**

## Question 1

Dans un repère orthonormé,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 4 + 2 \times (-1) + 3 \times 0 = 4 - 2 + 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$$

## Question 2

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9}$$

$$\|\vec{a}\| = 3$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1 + 4 + 9}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{14}$$

## Question 3

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + 3 \times 0 = 2 - 2 + 0 = 0$$

**Les vecteurs  $\vec{p}$  et  $\vec{q}$  sont orthogonaux.**

## Question 4

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = m \times 1 + 2 \times (-3) + 1 \times 4 = m - 6 + 4 = m - 2$$

Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si  $m - 2 = 0$ .

$$m = 2$$

**Exercice 2 (★★) : calculer un angle**

Calculer l'angle géométrique  $\theta$  entre :

1.  $\vec{u}(1; 1; 0)$  et  $\vec{v}(0; 1; 1)$
2.  $\vec{a}(1; 2; 2)$  et  $\vec{b}(2; -3; 6)$

## Correction de l'exercice 2

## Méthode

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \text{ avec } \theta \in [0; \pi].$$

## Question 1

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2} \text{ et } \|\vec{v}\| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \text{ soit } 60^\circ$$

## Question 2

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 + 2 \times (-3) + 2 \times 6 = 2 - 6 + 12 = 8$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1+4+4} = 3 \text{ et } \|\vec{b}\| = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

$$\cos \theta = \frac{8}{3 \times 7} = \frac{8}{21}$$

$$\theta = \arccos \frac{8}{21} \approx 67,6^\circ$$

## Exercice 3 (★★) : la nature d'un triangle

On donne  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(3; 1; -1)$ ,  $C(2; 4; 1)$ .

1. Calculer les longueurs  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ .
2. Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  et en déduire une valeur approchée de l'angle  $\widehat{BAC}$ .
3. Quelle est la nature du triangle  $ABC$  ?

## Correction de l'exercice 3

## Question 1

$$\overrightarrow{AB}(2; -1; -1), \overrightarrow{AC}(1; 2; 1), \overrightarrow{BC}(-1; 3; 2).$$

$$AB = \sqrt{4+1+1}$$

$$AB = \sqrt{6}$$

$$AC = \sqrt{1+4+1}$$

$$AC = \sqrt{6}$$

$$BC = \sqrt{1 + 9 + 4}$$

$$BC = \sqrt{14}$$

Question 2

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 1 + (-1) \times 2 + (-1) \times 1 = 2 - 2 - 1$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{-1}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = -\frac{1}{6}$$

$$\widehat{BAC} \approx 99,6^\circ$$

$$\text{Contrôle : } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 + 6 + 2 = 14$$

Question 3

$AB = AC$  : le triangle est isocèle en  $A$ .

De plus  $BC^2 = 14 > 12 = AB^2 + AC^2$  : le plus grand côté est  $[BC]$  et il n'y a pas égalité dans la relation de Pythagore.

Le produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1$  est négatif : l'angle en  $A$  est obtus.

Les angles en  $B$  et en  $C$  sont donc aigus, et aucun angle n'est droit.

$ABC$  est isocèle en  $A$ , avec un angle obtus en  $A$  : il n'est pas rectangle.

#### Exercice 4 (★★) : angles et orthogonalité dans un cube

$ABCDEFGH$  est un cube d'arête 1, avec le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

1. Calculer une valeur approchée de l'angle entre  $\overrightarrow{AG}$  et  $\overrightarrow{AB}$ .
2. Calculer l'angle  $\widehat{FAH}$ .
3. Montrer que  $(AG)$  est orthogonale à  $(BD)$  et à  $(BE)$ . Que peut-on en déduire pour la droite  $(AG)$  et le plan  $(BDE)$  ?

#### Correction de l'exercice 4

Coordonnées :  $A(0;0;0)$ ,  $B(1;0;0)$ ,  $D(0;1;0)$ ,  $E(0;0;1)$ ,  $F(1;0;1)$ ,  $G(1;1;1)$ ,  $H(0;1;1)$ .

Question 1

$$\overrightarrow{AG}(1;1;1) \text{ et } \overrightarrow{AB}(1;0;0). \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} = 1. \|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{3} \text{ et } \|\overrightarrow{AB}\| = 1.$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta \approx 54,7^\circ$$

Question 2

$$\overrightarrow{AF}(1;0;1) \text{ et } \overrightarrow{AH}(0;1;1). \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 + 0 + 1 = 1. \|\overrightarrow{AF}\| = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{2}.$$

$$\cos \widehat{FAH} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\widehat{FAH} = 60^\circ$$

(Le triangle  $AFH$  est équilatéral : ses côtés sont des diagonales de faces.)

Question 3

$$\overrightarrow{BD}(-1;1;0) \text{ et } \overrightarrow{BE}(-1;0;1).$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 + 1 + 0 = 0$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = -1 + 0 + 1 = 0$$

$(AG)$  est orthogonale à  $(BD)$  et à  $(BE)$ .

Les droites  $(BD)$  et  $(BE)$  sont sécantes en  $B$  et contenues dans le plan  $(BDE)$ .

$(AG)$  est orthogonale au plan  $(BDE)$ , et  $\overrightarrow{AG}$  est un vecteur normal à ce plan.

## Exercice 5 (★★) : identités sur les normes

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs tels que  $\|\vec{u}\| = 2$ ,  $\|\vec{v}\| = 3$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ .

Calculer  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ ,  $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ ,  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ ,  $\|2\vec{u} - \vec{v}\|^2$ , puis l'angle entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

### Correction de l'exercice 5

#### Méthode

On développe avec la bilinéarité :  $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$ .

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 4 - 2 + 9$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 11$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 4 + 2 + 9$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 15$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 4 - 9$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -5$$

$$\|2\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\|\vec{u}\|^2 - 4\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 16 + 4 + 9$$

$$\|2\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 29$$

$$L'angle. \cos \theta = \frac{-1}{2 \times 3} = -\frac{1}{6}$$

$$\theta \approx 99,6^\circ$$

Contrôle :  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 26 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2) = 2 \times 13$  (identité du parallélogramme)

## Exercice 6 (★★★) : les arêtes opposées d'un tétraèdre régulier

$ABCD$  est un tétraèdre régulier d'arête  $a$  : toutes ses arêtes mesurent  $a$ .

1. Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ .
2. Montrer que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ . Que peut-on en déduire pour les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  ?

### Correction de l'exercice 6

Question 1

Les faces sont des triangles équilatéraux :  $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$ .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos 60^\circ = a \times a \times \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$$

De même :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$$

Question 2

D'après Chasles,  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ . Donc, par bilinéarité :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont orthogonaux.

**Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont orthogonales.**

Elles ne sont pas coplanaires (les sommets du tétraèdre ne le sont pas) : elles sont orthogonales **sans être sécantes**. Le même raisonnement vaut pour les autres couples d'arêtes opposées.

**Exercice 7 (★★) : produit scalaire et projeté orthogonal**

Dans le cube  $ABCDEFGH$  d'arête 1, avec le repère de l'exercice 4 :

1. Quel est le projeté orthogonal de  $G$  sur la droite  $(AB)$  ? En déduire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$ .
2. Quel est le projeté orthogonal de  $G$  sur la droite  $(AC)$  ? En déduire  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG}$ .
3. Vérifier ces deux résultats avec les coordonnées.

**Correction de l'exercice 7**

## Question 1

Le projeté orthogonal de  $G$  sur  $(AB)$  est  $B$  : en effet  $\overrightarrow{BG}(0;1;1)$  est orthogonal à  $\overrightarrow{AB}(1;0;0)$ . Donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 1$$

## Question 2

Le projeté orthogonal de  $G$  sur  $(AC)$  est  $C$  : en effet  $\overrightarrow{CG}(0;0;1)$  est orthogonal à  $\overrightarrow{AC}(1;1;0)$ . Donc :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2 = 2$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = 2$$

## Question 3

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 1 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 1$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 2$$

**Exercice 8 (★★) : vrai ou faux**

Justifier chaque réponse :

1. Si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$  et  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , alors  $\vec{v} = \vec{w}$ .
2. Pour tous vecteurs,  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ .
3. Deux droites orthogonales sont sécantes.
4. Si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , alors  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ .
5. Pour tous vecteurs,  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .

**Correction de l'exercice 8**

## Affirmation 1

Contre-exemple :  $\vec{u}(1; 0; 0)$ ,  $\vec{v}(0; 1; 0)$ ,  $\vec{w}(0; 0; 1)$ .  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 = \vec{u} \cdot \vec{w}$  mais  $\vec{v} \neq \vec{w}$ .

**Faux.** On ne « simplifie » pas un produit scalaire.

## Affirmation 2

Par bilinéarité :  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ .

**Vrai.**

## Affirmation 3

Contre-exemple :  $(AB)$  et  $(CG)$  dans un cube sont orthogonales et non coplanaires.

**Faux.**

## Affirmation 4

Contre-exemple :  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$  avec  $\vec{i} \neq \vec{0}$  et  $\vec{j} \neq \vec{0}$ .

**Faux.**

## Affirmation 5

Contre-exemple :  $\vec{u} = \vec{i}$  et  $\vec{v} = \vec{j}$  :  $\|\vec{i} + \vec{j}\| = \sqrt{2} \neq 2$ . L'égalité n'a lieu que si les vecteurs sont colinéaires de même sens.

**Faux.**

## Ce qui peut tomber au bac

- Des **produits scalaires**, normes et **orthogonalités** en coordonnées (exercices 1 et 4).
- Le calcul d'un **angle** avec sa valeur approchée (exercices 2 et 3).
- Une **identité** avec Chasles et la bilinéarité (exercices 5 et 6).
- Le **projeté orthogonal** comme aide au calcul (exercice 7).

## QCM : une seule bonne réponse par question

1. Que vaut  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  pour  $\vec{u}(1; 2; 3)$  et  $\vec{v}(4; -1; 0)$  dans un repère orthonormé ?

- A. 2 (**bonne réponse**)
- B. 6
- C. 0
- D. 8

*Justification* :  $1 \times 4 + 2 \times (-1) + 3 \times 0 = 2$ .

2. Quelle est la norme de  $\vec{u}(2; -1; 2)$  dans un repère orthonormé ?

- A. 5
- B. 2
- C. 3 (bonne réponse)
- D. 9

*Justification* :  $\sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$ .

3. Les vecteurs  $\vec{u}(1; -2; 3)$  et  $\vec{v}(2; 1; 0)$  sont :

- A. orthogonaux (bonne réponse)
- B. colinéaires
- C. de même norme
- D. égaux

*Justification* :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 2 + 0 = 0$ .

4. Quel est le cosinus de l'angle entre  $\vec{u}(1; 1; 0)$  et  $\vec{v}(0; 1; 1)$  ?

- A.  $\frac{1}{2}$  (bonne réponse)
- B. 1
- C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- D. 0

*Justification* :  $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ , soit un angle de  $60^\circ$ .

5. Dans un repère non orthonormé, la formule  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$  :

- A. donne toujours 0
- B. donne le produit vectoriel
- C. reste valable
- D. n'est pas valable (bonne réponse)

*Justification* : Cette expression suppose une base orthonormée : vecteurs de norme 1 et orthogonaux deux à deux.

6. Dans l'exercice 2, quel est l'angle géométrique entre  $\vec{u}(1; 1; 0)$  et  $\vec{v}(0; 1; 1)$  ?

- A.  $45^\circ$
- B.  $60^\circ$  (bonne réponse)
- C.  $90^\circ$
- D.  $30^\circ$

*Justification* :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ ,  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ , donc  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ , soit  $\theta = 60^\circ$ .

7. Dans l'exercice 3, quelle est la nature du triangle  $ABC$  avec  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(3; 1; -1)$ ,  $C(2; 4; 1)$  ?

- A. rectangle en  $A$
- B. **isocèle en  $A$ , avec un angle obtus en  $A$  (bonne réponse)**
- C. équilatéral
- D. isocèle et rectangle

*Justification* :  $AB = AC = \sqrt{6}$  (isocèle) et  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 < 0$  (angle obtus, donc pas rectangle).

8. Dans l'exercice 4, l'angle entre  $\overrightarrow{AG}$  (diagonale du cube) et  $\overrightarrow{AB}$  vaut environ :

- A.  $45^\circ$
- B.  $60^\circ$
- C.  $90^\circ$
- D.  **$54,7^\circ$  (bonne réponse)**

*Justification* :  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , donc  $\theta \approx 54,7^\circ$ .

9. Dans l'exercice 6 (tétraèdre régulier d'arête  $a$ ), que vaut  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  ?

- A.  **$\frac{a^2}{2}$  (bonne réponse)**
- B.  $a^2$
- C. 0
- D.  $\frac{a^2}{4}$

*Justification* : Les faces sont équilatérales :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos 60^\circ = a^2 \times \frac{1}{2}$ .

10. Dans l'exercice 7, quel est le projeté orthogonal de  $G$  sur la droite  $(AB)$ , dans le cube d'arête 1 ?

- A.  **$B$  (bonne réponse)**
- B. le milieu de  $[AB]$
- C.  $A$
- D.  $C$

*Justification* :  $\overrightarrow{BG}(0;1;1)$  est orthogonal à  $\overrightarrow{AB}(1;0;0)$  :  $B$  est bien le projeté orthogonal de  $G$  sur  $(AB)$ .