

Contrôle : chapitre 11, Orthogonalité et distances dans l'espace

Durée : 60 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Un triangle dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; -1; 2)$, $B(3; 1; 3)$ et $C(0; 1; 4)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis les longueurs AB et AC . Que peut-on dire du triangle ABC ? (1,5 points)
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. En déduire une valeur approchée au dixième de degré de l'angle $\widehat{BAC}$. (2 points)
3. Soit I le milieu du segment $[BC]$. Calculer les coordonnées de I et démontrer que les droites (AI) et (BC) sont orthogonales. (1,5 points)
4. Calculer l'aire du triangle ABC sous forme exacte. (1 point)

Exercice 2 (7 points) : Une pyramide à base carrée

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la pyramide $SABCD$ de base carrée $ABCD$ telle que $A(0; 0; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(4; 4; 0)$, $D(0; 4; 0)$ et de sommet $S(0; 0; 3)$. L'arête $[SA]$ est donc perpendiculaire à la base.

1. Démontrer que la droite (BC) est orthogonale au plan (SAB) . En déduire que le triangle SBC est rectangle en B . (2 points)
2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(3; 0; 4)$ est normal au plan (SBC) , puis déterminer une équation cartésienne de ce plan. (2 points)
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan (SBC) . (2 points)
4. Calculer la distance du point A au plan (SBC) de deux façons différentes : avec H , puis en exprimant de deux manières le volume du tétraèdre $ASBC$. (1 point)

Exercice 3 (7 points) : Un toit, un mur et un drone

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'unité le mètre, un toit est modélisé par le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + 2z - 6 = 0$ et un mur par le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $x + 2y - 4 = 0$.

On donne le script Python suivant, utilisé à la dernière question.

```
from math import sqrt

def distance(W):
    n = (2, -1, 2)          # vecteur normal au plan P : 2x - y + 2z - 6 = 0
    k = (6 - (n[0]*W[0] + n[1]*W[1] + n[2]*W[2])) / 9
    H = (W[0] + k*n[0], W[1] + k*n[1], W[2] + k*n[2])    # projeté orthogonal de W
    sur P
    return .....

print(distance((1, 0, 4)))
```

1. Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires. (1 point)
2. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ se coupent suivant une droite Δ . Démontrer que Δ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 4 - 4s \\ y = 2s \\ z = -1 + 5s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$. (2 points)
3. Un drone se déplace en ligne droite : sa position à l'instant t (en secondes, $t \geq 0$) est le point $M(t)$ de coordonnées $(1 + t; 2t; 4 - t)$. Le drone traverse-t-il le toit modélisé par $\mathcal{P}$? Si oui, donner la position du point d'impact et l'instant correspondant. (2 points)
4. À l'instant $t = 0$, le drone est au point $W(1; 0; 4)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de W sur le plan $\mathcal{P}$, puis en déduire la distance de W au toit. (1 point)
5. On souhaite programmer ce calcul en Python. Compléter la ligne `return` de la fonction ci-dessous (norme du vecteur $\overrightarrow{WH}$), puis donner la valeur affichée par le programme. (1 point)