

Contrôle : chapitre 11, Orthogonalité et distances dans l'espace

Durée : 60 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Un triangle dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; -1; 2)$, $B(3; 1; 3)$ et $C(0; 1; 4)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis les longueurs AB et AC . Que peut-on dire du triangle ABC ? (1,5 points)
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. En déduire une valeur approchée au dixième de degré de l'angle $\widehat{BAC}$. (2 points)
3. Soit I le milieu du segment $[BC]$. Calculer les coordonnées de I et démontrer que les droites (AI) et (BC) sont orthogonales. (1,5 points)
4. Calculer l'aire du triangle ABC sous forme exacte. (1 point)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1,5 points)

Le repère est orthonormé : $\overrightarrow{AB}(2; 2; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 2; 2)$.

$$AB = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ et } AC = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Comme $AB = AC$, le triangle ABC est **isocèle en A**.

Barème : 0,5 point pour les coordonnées des deux vecteurs ; 0,5 point pour les deux normes ; 0,5 point pour la conclusion (isocèle en A).

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (2 points)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + 2 \times 2 + 1 \times 2 = -2 + 4 + 2 = 4.$$

Or $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$, donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{4}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$.

Comme $\widehat{BAC} \in [0; 180]$ (en degrés), $\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{4}{9}\right)$.

$\widehat{BAC} \approx 63,6^\circ$.

Le produit scalaire n'est pas nul : le triangle n'est pas rectangle en A .

Barème : 0,5 point pour le produit scalaire en coordonnées ; 0,5 point pour l'égalité avec $AB \times AC \times \cos$; 0,5 point pour $\cos \widehat{BAC} = \frac{4}{9}$; 0,5 point pour la valeur de l'angle.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (1,5 points)

$I\left(\frac{3+0}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{3+4}{2}\right)$, soit $I\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{7}{2}\right)$.

$\vec{AI}\left(\frac{1}{2}; 2; \frac{3}{2}\right)$ et $\vec{BC}(-3; 0; 1)$.

$\vec{AI} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2} \times (-3) + 2 \times 0 + \frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$.

Les vecteurs sont orthogonaux : les droites (AI) et (BC) sont orthogonales (et même perpendiculaires, car sécantes en I).

Barème : 0,5 point pour les coordonnées de I ; 0,5 point pour le produit scalaire $\vec{AI} \cdot \vec{BC}$; 0,5 point pour la conclusion.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (1 point)

$AI = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{13}{2}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$ et $BC = \sqrt{9 + 0 + 1} = \sqrt{10}$.

(AI) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC , car $(AI) \perp (BC)$: $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times BC \times$

$AI = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{26}}{2} = \frac{\sqrt{260}}{4} = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{65}}{2} \approx 4,03$ unités d'aire.

Barème : 0,5 point pour AI et BC (hauteur justifiée) ; 0,5 point pour l'aire exacte.

Exercice 2 (7 points) : Une pyramide à base carrée

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la pyramide $SABCD$ de base carrée $ABCD$ telle que $A(0; 0; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(4; 4; 0)$, $D(0; 4; 0)$ et de sommet $S(0; 0; 3)$. L'arête $[SA]$ est donc perpendiculaire à la base.

1. Démontrer que la droite (BC) est orthogonale au plan (SAB) . En déduire que le triangle SBC est rectangle en B . (2 points)
2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(3; 0; 4)$ est normal au plan (SBC) , puis déterminer une équation cartésienne de ce plan. (2 points)
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan (SBC) . (2 points)
4. Calculer la distance du point A au plan (SBC) de deux façons différentes : avec H , puis en exprimant de deux manières le volume du tétraèdre $ASBC$. (1 point)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (2 points)

$\overrightarrow{AB}(4; 0; 0)$, $\overrightarrow{AS}(0; 0; 3)$ et $\overrightarrow{BC}(0; 4; 0)$.

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ et } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AS} = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AS}$ ne sont pas colinéaires : ce sont des vecteurs directeurs de deux droites sécantes en A du plan (SAB) . Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, donc à tout vecteur de ce plan : **(BC) est orthogonale au plan (SAB) .**

En particulier, (BC) est orthogonale à la droite (SB) contenue dans ce plan. Comme ces deux droites sont sécantes en B , elles sont perpendiculaires.

Le triangle SBC est rectangle en B .

Barème : 0,5 point pour les coordonnées et les deux produits scalaires nuls ; 0,5 point pour la non-colinéarité (ou sécantes) justifiée ; 0,5 point pour la conclusion sur le plan ; 0,5 point pour le triangle rectangle en B .

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (2 points)

$\overrightarrow{SB}(4; 0; -3)$ et $\overrightarrow{BC}(0; 4; 0)$ ne sont pas colinéaires.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{SB} = 3 \times 4 + 0 + 4 \times (-3) = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (SBC) , donc **normal** à ce plan.

Une équation du plan est de la forme $3x + 4z + d = 0$. Le point $B(4; 0; 0)$ en fait partie : $12 + d = 0$, donc $d = -12$.

Une équation de (SBC) est $3x + 4z - 12 = 0$.

Vérification : $S : 0 + 12 - 12 = 0$; $C : 12 + 0 - 12 = 0$.

Barème : 1 point pour le vecteur normal justifié par deux produits scalaires nuls ; 0,5 point pour l'équation avec le calcul de d ; 0,5 point pour la vérification avec un autre point.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (2 points)

H est le point du plan (SBC) tel que $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\vec{n}$: il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$, donc $H(3k; 0; 4k)$.

$H \in (SBC)$ donc $3 \times 3k + 4 \times 4k - 12 = 0$, soit $25k = 12$ et $k = \frac{12}{25}$.

$H\left(\frac{36}{25}; 0; \frac{48}{25}\right)$.

Vérification : $3 \times \frac{36}{25} + 4 \times \frac{48}{25} - 12 = \frac{108 + 192}{25} - 12 = 12 - 12 = 0$.

Barème : 0,5 point pour $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$; 0,5 point pour l'équation en k et $k = \frac{12}{25}$; 0,5 point pour les coordonnées de H ; 0,5 point pour la vérification $H \in (SBC)$.

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (1 point)

Avec H . H est le projeté orthogonal de A sur (SBC) , donc $d(A, (SBC)) = AH = \frac{12}{25} \|\vec{n}\| = \frac{12}{25} \times \sqrt{9 + 16} = \frac{12}{25} \times 5 = \frac{12}{5}$.

Avec le volume. Le triangle SAB est rectangle en A , d'aire $\frac{1}{2} \times AB \times AS = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$, et (BC) est orthogonale au plan (SAB) : la hauteur issue de C est $BC = 4$. Donc $V = \frac{1}{3} \times 6 \times 4 = 8$.

Le triangle SBC est rectangle en B , d'aire $\frac{1}{2} \times SB \times BC = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$. En prenant SBC pour base, $V = \frac{1}{3} \times 10 \times d(A, (SBC))$, d'où $d(A, (SBC)) = \frac{3 \times 8}{10} = \frac{12}{5}$.

La distance de A au plan (SBC) est $\frac{12}{5} = 2,4$, valeur obtenue de deux façons.

Barème : 0,5 point pour $AH = \frac{12}{5}$; 0,5 point pour le volume 8, l'aire 10 et la concordance.

Exercice 3 (7 points) : Un toit, un mur et un drone

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'unité le mètre, un toit est modélisé par le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + 2z - 6 = 0$ et un mur par le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $x + 2y - 4 = 0$.

On donne le script Python suivant, utilisé à la dernière question.

```
from math import sqrt

def distance(W):
    n = (2, -1, 2)          # vecteur normal au plan P : 2x - y + 2z - 6 = 0
    k = (6 - (n[0]*W[0] + n[1]*W[1] + n[2]*W[2])) / 9
    H = (W[0] + k*n[0], W[1] + k*n[1], W[2] + k*n[2])    # projeté orthogonal de W
    sur P
    return .....

print(distance((1, 0, 4)))
```

1. Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires. (1 point)
2. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ se coupent suivant une droite Δ . Démontrer que Δ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 4 - 4s \\ y = 2s \\ z = -1 + 5s \end{cases} (s \in \mathbb{R})$. (2 points)
3. Un drone se déplace en ligne droite : sa position à l'instant t (en secondes, $t \geq 0$) est le point $M(t)$ de coordonnées $(1 + t; 2t; 4 - t)$. Le drone traverse-t-il le toit modélisé par $\mathcal{P}$? Si oui, donner la position du point d'impact et l'instant correspondant. (2 points)
4. À l'instant $t = 0$, le drone est au point $W(1; 0; 4)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de W sur le plan $\mathcal{P}$, puis en déduire la distance de W au toit. (1 point)
5. On souhaite programmer ce calcul en Python. Compléter la ligne **return** de la fonction ci-dessous (norme du vecteur $\overrightarrow{WH}$), puis donner la valeur affichée par le programme. (1 point)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (1 point)

$\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}_1(2; -1; 2)$ et $\mathcal{Q}$ a pour vecteur normal $\vec{n}_2(1; 2; 0)$.

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 2 \times 0 = 0.$$

Les vecteurs normaux sont orthogonaux : les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires.

Barème : 0,5 point pour les vecteurs normaux lus sur les équations ; 0,5 point pour le produit scalaire nul et la conclusion.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (2 points)

Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires : les plans sont sécants suivant une droite.

Un point $M(x; y; z)$ est sur Δ si et seulement si $\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$. On pose $y = 2s$: $x =$

$4 - 2y = 4 - 4s$, puis $2z = 6 - 2x + y = 6 - 8 + 8s + 2s = -2 + 10s$, donc $z = -1 + 5s$.

Contrôle : $2(4 - 4s) - 2s + 2(-1 + 5s) = 8 - 8s - 2s - 2 + 10s = 6$ et $(4 - 4s) + 2 \times 2s = 4$.

Une représentation paramétrique de Δ est bien celle de l'énoncé.

Barème : 0,5 point pour les plans sécants (normaux non colinéaires) ; 1 point pour la résolution du système avec un paramètre ; 0,5 point pour la vérification dans les deux équations.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (2 points)

On remplace dans l'équation de $\mathcal{P}$: $2(1 + t) - 2t + 2(4 - t) - 6 = 2 + 2t - 2t + 8 - 2t - 6 = 4 - 2t$.

$4 - 2t = 0 \iff t = 2$: l'équation a une unique solution, donc la trajectoire coupe le plan $\mathcal{P}$ en un seul point (le vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; -1)$ vérifie $\vec{u} \cdot \vec{n}_1 = -2 \neq 0$, il n'est pas parallèle au plan).

Pour $t = 2$: $M(2) = (3; 4; 2)$.

Le drone atteint le toit à l'instant $t = 2$ s, au point $(3; 4; 2)$.

Barème : 1 point pour l'équation en t et sa résolution ; 0,5 point pour l'unique solution (non parallélisme) justifiée ; 0,5 point pour le point d'impact et l'instant.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (1 point)

H est le point de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{WH}$ est colinéaire à $\vec{n}_1(2; -1; 2)$: il existe un réel k tel que $H(1 + 2k; -k; 4 + 2k)$.

$H \in \mathcal{P}$ donc $2(1 + 2k) - (-k) + 2(4 + 2k) - 6 = 0$, soit $9k + 4 = 0$ et $k = -\frac{4}{9}$. Ainsi $H\left(\frac{1}{9}; \frac{4}{9}; \frac{28}{9}\right)$.

La distance de W à $\mathcal{P}$ est $WH = |k| \|\vec{n}_1\| = \frac{4}{9} \times \sqrt{4 + 1 + 4} = \frac{4}{9} \times 3$.

$H\left(\frac{1}{9}; \frac{4}{9}; \frac{28}{9}\right)$ et le drone est à $WH = \frac{4}{3} \approx 1,33$ m du toit à l'instant $t = 0$.

Barème : 0,5 point pour $\overrightarrow{WH} = k\vec{n}_1$, l'équation en k et les coordonnées de H ; 0,5 point pour la distance $WH = \frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 3, question 5

Question 5 (1 point)

Le script complété est le suivant.

```
from math import sqrt

def distance(W):
    n = (2, -1, 2) # vecteur normal au plan P : 2x - y + 2z - 6 = 0
    k = (6 - (n[0]*W[0] + n[1]*W[1] + n[2]*W[2])) / 9
    H = (W[0] + k*n[0], W[1] + k*n[1], W[2] + k*n[2]) # projeté orthogonal de
    W sur P
    return sqrt((H[0]-W[0])**2 + (H[1]-W[1])**2 + (H[2]-W[2])**2)

print(distance((1, 0, 4)))
```

Le programme affiche une valeur approchée de $\frac{4}{3}$: 1.3333333333333333.

Barème : 0,5 point pour l'expression correcte (norme de $\overrightarrow{WH}$ avec `sqrt`) ; 0,5 point pour la valeur affichée.

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	6
Exercice 2	7
Exercice 3	7
Total	20