

Vecteurs, droites et plans de l'espace : le cours

La géométrie dans l'espace, c'est la géométrie plane... avec une dimension en plus, et la difficulté de faire un dessin lisible. Heureusement, les **vecteurs** et les **coordonnées** remplacent le dessin : un calcul ne se trompe pas de perspective.

Ce chapitre répond à des questions très classiques du bac :

- ces trois points sont-ils alignés ?
- ces quatre points sont-ils dans un même plan ?
- ces deux droites se coupent-elles ?
- cette droite est-elle parallèle à ce plan ?

Dans tout le cours, tu verras des astuces , des pièges et un peu d'humour .

Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Retiens le fil rouge du chapitre : **tout se ramène à une combinaison linéaire de vecteurs**.
Colinéaires : $\vec{w} = k\vec{u}$. Coplanaires : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
- Ne te fie **jamais** à la figure : elle sert à comprendre, pas à démontrer.

1. Les vecteurs de l'espace

Les vecteurs de l'espace se manipulent **exactement comme dans le plan**.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est associé à la translation qui transforme A en B .
- **Relation de Chasles** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
- I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- On peut additionner deux vecteurs, multiplier un vecteur par un réel, et les règles de calcul sont les mêmes qu'en seconde.

Dans un **parallélépipède** $ABCDEFGH$ (dont le cube), on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

Astuce Chasles. Pour décomposer un vecteur, **insère un point** : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$. Choisis les points intermédiaires pour retomber sur des vecteurs connus (les arêtes du solide).

2. Colinéarité, droites de l'espace

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si l'un est un multiple de l'autre. Si $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{u} = k\vec{v}$$

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

- **Points alignés** : A, B, C sont alignés $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- **Droite** : la droite passant par A et de **vecteur directeur** $\vec{u} \neq \vec{0}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$.
- **Droites parallèles** : deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

3. Plans de l'espace

Soit A un point, et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires**. L'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

est un **plan**, noté $(A; \vec{u}, \vec{v})$. On dit que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une **base** de ce plan.

- **Trois points non alignés** A, B, C définissent un plan $(ABC) = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- **Plans parallèles** : deux plans sont parallèles si et seulement si leurs bases engendrent les mêmes vecteurs, c'est-à-dire si les vecteurs de l'un s'écrivent comme combinaisons linéaires de ceux de l'autre.

4. Coplanarité et base de l'espace

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont **coplanaires** si, en les représentant avec la même origine O par $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, les points O, A, B, C sont dans un même plan.

Théorème (coplanarité). Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires**. Le vecteur $\vec{w}$ est coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

Conséquence. Quatre points A, B, C, D (avec A, B, C non alignés) sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

Base de l'espace. Trois vecteurs **non coplanaires** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forment une **base** de l'espace. Tout vecteur $\vec{w}$ s'écrit alors **de manière unique** :

$$\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Les réels $(x; y; z)$ sont les **coordonnées** de $\vec{w}$ dans cette base. Dans un **tétraèdre** $ABCD$ (quatre points non coplanaires), $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est une base de l'espace.

Pièges :

- Trois vecteurs **coplanaires** n'ont pas besoin d'être colinéaires : $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{j}$ sont coplanaires sans être colinéaires.
- Le théorème de coplanarité exige que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient **non colinéaires**.
- Pour montrer que des vecteurs **ne sont pas** coplanaires, il faut prouver qu'**aucune** combinaison linéaire ne convient : un système sans solution.

Trois vecteurs coplanaires, c'est comme trois personnes qui se sont assises sur la même nappe de pique-nique : elles peuvent être loin les unes des autres, mais elles sont toutes dessus.

5. Repère et coordonnées

Un **repère** de l'espace est $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base. Le point M a pour coordonnées $(x; y; z)$ si $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Pour $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$:

- **Vecteur** : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- **Milieu** de $[AB]$: $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- **Combinaison linéaire** : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ a pour coordonnées $(\alpha x + \beta x'; \alpha y + \beta y'; \alpha z + \beta z')$.
- **Colinéarité** : $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$) sont colinéaires $\iff$ leurs coordonnées sont **proportionnelles** : il existe k avec $x = kx', y = ky', z = kz'$.

Méthode : trois vecteurs sont-ils coplanaires ?

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ avec $\vec{u}, \vec{v}$ **non colinéaires**.

1. Écris $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$: cela donne **trois équations** en a et b .
2. Résous le système avec **deux** équations.
3. **Vérifie la troisième** avec les valeurs trouvées.
4. Si elle est vérifiée : coplanaires, avec $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Sinon : **non coplanaires**.

Astuce. Pour prouver que quatre points sont coplanaires, ramène-toi à **une seule** relation $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$. Écris-la explicitement dans la copie : c'est la preuve.

6. Représentation paramétrique d'une droite

La droite d passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

C'est une **représentation paramétrique** de d . À chaque valeur de t correspond un point de d .

- **Un point est-il sur la droite ?** On cherche t à partir d'une coordonnée, puis on **vérifie les deux autres**.
- **Droite (AB)** : on prend A comme point et $\overrightarrow{AB}$ (ou un multiple simplifié) comme vecteur directeur.
- Une droite a **une infinité** de représentations paramétriques : on peut changer de point et de vecteur directeur.

7. Positions relatives

Deux droites

d passe par A avec $\vec{u}$, et d' passe par A' avec $\vec{u}'$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont **colinéaires** : les droites sont **parallèles**. Elles sont **confondues** si $A' \in d$, sinon **strictement parallèles**.
- **Sinon** : on résout le système obtenu en égalant les coordonnées (paramètres t et s).
 - une solution unique : **sécantes** en un point ;
 - aucune solution : **non coplanaires**.

Dans l'espace, deux droites qui ne sont pas parallèles **ne sont pas forcément sécantes**.

Il existe des droites **non coplanaires** : elles ne se coupent jamais et ne sont pas parallèles.

Ne conclus donc « sécantes » qu'après avoir **trouvé le point d'intersection**.

Une droite et un plan

d passe par A avec $\vec{u}$; $P = (B; \vec{v}, \vec{w})$.

- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ **non coplanaires** : d et P sont **sécants** en un unique point.
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ **coplanaires** : d est **parallèle** à P . Elle est **incluse** dans P si $A \in P$, sinon **strictement parallèle**.

Pour trouver le point d'intersection : on écrit $\overrightarrow{BM} = x\vec{v} + y\vec{w}$ avec $M = A + t\vec{u}$, ce qui donne un système de trois équations à trois inconnues (t, x, y) .

Deux plans

$P = (A; \vec{u}, \vec{v})$ et $P' = (A'; \vec{u}', \vec{v}')$.

- $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont des **combinaisons linéaires** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: les plans sont **parallèles**. Confondus si $A' \in P$, sinon **strictement parallèles**.
- **Sinon** : les plans sont **sécants suivant une droite**.

8. Les propriétés de parallélisme

Ces résultats servent à justifier une intersection sans calcul.

- **Plans parallèles** : si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre suivant deux droites **parallèles**.
- **Droite parallèle à un plan** : si une droite d est parallèle à une droite de P , alors d est parallèle à P (ou incluse dans P).
- **Théorème du toit** : soient deux plans P_1 et P_2 **sécants** suivant une droite Δ . Si une droite d_1 de P_1 est parallèle à une droite d_2 de P_2 , alors Δ est parallèle à d_1 et à d_2 .

Pourquoi le toit ? Soit $\vec{u}$ le vecteur directeur commun à d_1 et d_2 .

Il est dans la direction de P_1 et de P_2 .

Si Δ n'était pas dirigée par $\vec{u}$, les deux plans auraient la même direction, donc seraient parallèles : contradiction avec « sécants ».

9. Python

```
def vecteur(A, B):
    return (B[0] - A[0], B[1] - A[1], B[2] - A[2])

def colineaires(u, v):
    return (u[1]*v[2] - u[2]*v[1] == 0
            and u[2]*v[0] - u[0]*v[2] == 0
            and u[0]*v[1] - u[1]*v[0] == 0)

def alignes(A, B, C):
    return colineaires(vecteur(A, B), vecteur(A, C))

def point(A, u, t):
    return (A[0] + t*u[0], A[1] + t*u[1], A[2] + t*u[2])
```

Ici, `colineaires` teste que les « produits en croix » sont tous nuls. Avec des nombres décimaux, préfère des fractions (`Fraction` du module `fractions`) pour éviter les erreurs d'arrondi.

10. Les 10 pépites du chapitre

1. **Colinéaire** : $\vec{w} = k\vec{u}$. **Coplanaire** : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Écris la relation.
2. **Chasles** : insère un point pour retomber sur les arêtes.
3. **Ne te fie jamais à la figure** : justifie par un calcul.
4. **Coplanarité par coordonnées** : deux équations pour trouver a et b , la troisième pour vérifier.
5. Le théorème de coplanarité demande $\vec{u}, \vec{v}$ **non colinéaires**.
6. **Représentation paramétrique** : point + $t \times$ vecteur directeur, avec $t \in \mathbb{R}$.
7. Pour un point sur une droite : trouve t avec une coordonnée, **vérifie les deux autres**.
8. Deux droites non parallèles : **résous le système**. Aucune solution $\Rightarrow$ non coplanaires.
9. Droite et plan : vecteur directeur coplanaire avec la base $\Rightarrow$ parallèle. Reste à voir si elle est incluse.
10. **Théorème du toit** pour trouver une intersection de plans sans calcul.

11. Ce qui peut tomber au bac

- Des **vecteurs** exprimés avec Chasles, avec **alignement** et **coplanarité** (fiche 1).
- Des **coordonnées** : alignement, coplanarité, décomposition dans une base (fiche 2).
- Des **représentations paramétriques, positions relatives** de droites et de plans (fiche 3).
- Des **problèmes de solides** : tétraèdre, cube, pyramide, avec Python (fiche 4 et exercices type bac).

Tu as maintenant le cours. Passe aux quatre fiches, aux exercices type bac, puis au Guide de rédaction du chapitre.