

Vecteurs, droites et plans de l'espace : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac :

- un cube muni d'un repère : coordonnées, parallélogramme, coplanarité, droites sécantes et non coplanaires ;
- un tétraèdre et sa base : centre de gravité, alignement, droites sécantes ;
- deux droites avec un paramètre, un plan, et un script Python.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac :

- vecteurs et coordonnées écrits ;
- relation de colinéarité ou de coplanarité exhibée ;
- système résolu **et** troisième équation vérifiée ;
- position relative nommée, point d'intersection donné ;
- conclusion en contexte.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Pour chaque question sur des points ou des droites, commence par écrire **les coordonnées des vecteurs** dont tu as besoin.
- Pour un système, écris **les trois équations**, résous-en deux, **vérifie la troisième**.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : un cube, un repère, des milieux

$ABCDEFGH$ est un cube. On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On note I le milieu de $[EH]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[CG]$.

1. Donner les coordonnées des points I, J, K .
2. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EB}$. En déduire la nature du quadrilatère $EIJB$ et le parallélisme de (IJ) et (EB) .
3. Les points A, I, J, K sont-ils coplanaires ?
4. Donner une représentation paramétrique des droites (IJ) et (AG) . Montrer qu'elles sont sécantes et préciser leur point d'intersection Ω .
5. Étudier la position relative des droites (IJ) et (BG) .

Exercice 2 : un tétraèdre et son centre de gravité

$ABCD$ est un tétraèdre. On note I le milieu de $[BC]$, J le milieu de $[AD]$ et G le centre de gravité du triangle BCD , c'est-à-dire le point vérifiant $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

On note K le point défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

1. Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est une base de l'espace.
2. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.
3. Montrer que les points A, K, G sont alignés et exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AG}$.
4. Montrer que K est le milieu de $[IJ]$.
5. En déduire que les droites (AG) et (IJ) sont sécantes en K .

Exercice 3 : deux droites avec un paramètre, un plan et Python

Dans un repère de l'espace, on considère les droites :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$d_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = 3 + ms, \\ z = 1 - s \end{cases}, s \in \mathbb{R}, \text{ où } m \text{ est un réel.}$$

1. Montrer que, quel que soit m , les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
2. Déterminer la valeur de m pour laquelle d_1 et d_2 sont sécantes. Donner alors les coordonnées de leur point d'intersection I .
3. Pour cette valeur de m , on note Π le plan contenant d_1 et d_2 . Le point $F(1; 10; 7)$ appartient-il à Π ? Le point $G(2; 3; 4)$?
4. On complète la fonction Python ci-dessous.

Quelles valeurs renvoie `sur_droite((5,0,1), (1,-2,3), (2,1,-1))` et `sur_droite((2,0,1), (1,-2,3), (2,1,-1))` ?

Interpréter.

```
from fractions import Fraction

def sur_droite(M, A, u):
    for i in range(3):
        if u[i] != 0:
            t = Fraction(M[i] - A[i], u[i])
            break
    return all(A[j] + t*u[j] == M[j] for j in range(3))
```

Les réflexes à retenir

- Une **coplanarité** se démontre en exhibant $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$; une **non-coplanarité** avec un système sans solution.
- Deux droites **non parallèles** ne sont sécantes que si le **système a une solution** : écris-le, résous-le, vérifie.
- Un **paramètre** se trouve avec les équations qui n'en dépendent pas, puis la dernière équation.
- Dans un **tétraèdre**, la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ donne l'**unicité** de la décomposition.
- **Conclus** chaque question avec la position relative ou la propriété.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les exercices de géométrie dans l'espace des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.