

Vecteurs, droites et plans de l'espace : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac :

- un cube muni d'un repère : coordonnées, parallélogramme, coplanarité, droites sécantes et non coplanaires ;
- un tétraèdre et sa base : centre de gravité, alignement, droites sécantes ;
- deux droites avec un paramètre, un plan, et un script Python.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac :

- vecteurs et coordonnées écrits ;
- relation de colinéarité ou de coplanarité exhibée ;
- système résolu **et** troisième équation vérifiée ;
- position relative nommée, point d'intersection donné ;
- conclusion en contexte.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Pour chaque question sur des points ou des droites, commence par écrire **les coordonnées des vecteurs** dont tu as besoin.
- Pour un système, écris **les trois équations**, résous-en deux, **vérifie la troisième**.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : un cube, un repère, des milieux

$ABCDEFGH$ est un cube. On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On note I le milieu de $[EH]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[CG]$.

1. Donner les coordonnées des points I, J, K .
2. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EB}$. En déduire la nature du quadrilatère $EIJ B$ et le parallélisme de (IJ) et (EB) .
3. Les points A, I, J, K sont-ils coplanaires ?
4. Donner une représentation paramétrique des droites (IJ) et (AG) . Montrer qu'elles sont sécantes et préciser leur point d'intersection Ω .
5. Étudier la position relative des droites (IJ) et (BG) .

Correction de la question 1

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $F(1; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$, $H(0; 1; 1)$.

I est le milieu de $[EH]$: $I\left(\frac{0+0}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{1+1}{2}\right)$.

$$I\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$$

J est le milieu de $[BC]$: $J\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{0+0}{2}\right)$.

$$J\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$$

K est le milieu de $[CG]$: $K\left(\frac{1+1}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right)$.

$$K\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$$

Correction de la question 2

$$\overrightarrow{IJ}\left(1-0; \frac{1}{2}-\frac{1}{2}; 0-1\right) = (1; 0; -1).$$

$$\overrightarrow{EB}(1-0; 0-0; 0-1) = (1; 0; -1).$$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EB}$$

Donc $EIJ B$ est un parallélogramme. Comme il est plan, les points E, I, J, B sont coplanaires. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont égaux, donc colinéaires.

$EIJB$ est un parallélogramme et $(IJ) \parallel (EB)$.

Correction de la question 3

$\overrightarrow{AI} \left(0; \frac{1}{2}; 1 \right)$ et $\overrightarrow{AJ} \left(1; \frac{1}{2}; 0 \right)$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles). On a $\overrightarrow{AK} \left(1; 1; \frac{1}{2} \right)$.

Cherchons a, b tels que $\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{AI} + b\overrightarrow{AJ}$:

$$1 = b, 1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, \frac{1}{2} = a$$

La première et la troisième donnent $b = 1$ et $a = \frac{1}{2}$. La deuxième donne $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{4} \neq 1$: elle n'est pas vérifiée.

Le système n'a pas de solution.

Les points A, I, J, K ne sont pas coplanaires.

Correction de la question 4

La droite (IJ) passe par $I \left(0; \frac{1}{2}; 1 \right)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{IJ}(1; 0; -1)$.

$$(IJ) : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

La droite (AG) passe par $A(0; 0; 0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$.

$$(AG) : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Les vecteurs directeurs $(1; 0; -1)$ et $(1; 1; 1)$ ne sont pas colinéaires : les droites ne sont pas parallèles.

Point commun. On résout $t = s, \frac{1}{2} = s, 1 - t = s$.

La deuxième donne $s = \frac{1}{2}$. La première donne $t = \frac{1}{2}$. La troisième est vérifiée : $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Les droites (IJ) et (AG) sont sécantes au point $\Omega \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$, le centre du cube.

Correction de la question 5

La droite (BG) passe par $B(1;0;0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BG}(0;1;1)$.

$$(BG) : \begin{cases} x = 1 \\ y = s \\ z = s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Les vecteurs $(1;0;-1)$ et $(0;1;1)$ ne sont pas colinéaires : les droites ne sont pas parallèles.

On résout $t = 1, \frac{1}{2} = s, 1 - t = s$. La première donne $t = 1$, la deuxième $s = \frac{1}{2}$. La troisième donne $1 - 1 = 0 \neq \frac{1}{2}$: elle n'est pas vérifiée.

Le système n'a pas de solution.

Les droites (IJ) et (BG) sont non coplanaires.

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1** : coordonnées des milieux calculées avec la formule.
- **Q2** : coordonnées des deux vecteurs, égalité, conclusion « parallélogramme donc plan », parallélisme.
- **Q3** : vecteurs $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ non colinéaires, système écrit avec **trois** équations, la troisième **non vérifiée**, conclusion.
- **Q4** : deux représentations paramétriques, vecteurs directeurs non colinéaires, **deux paramètres différents**, système résolu, troisième équation vérifiée, point donné.
- **Q5** : même méthode, contradiction, conclusion « non coplanaires ».

Exercice 2 : un tétraèdre et son centre de gravité

$ABCD$ est un tétraèdre. On note I le milieu de $[BC]$, J le milieu de $[AD]$ et G le centre de gravité du triangle BCD , c'est-à-dire le point vérifiant $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

On note K le point défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

1. Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est une base de l'espace.
2. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.
3. Montrer que les points A, K, G sont alignés et exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AG}$.
4. Montrer que K est le milieu de $[IJ]$.
5. En déduire que les droites (AG) et (IJ) sont sécantes en K .

Correction de la question 1

Les points A, B, C, D sont les sommets d'un tétraèdre : ils ne sont pas coplanaires. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est une base de l'espace.

Correction de la question 2

D'après Chasles, $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$, et de même pour C et D . La relation $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ devient :

$$3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

Comme $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AG}$:

$$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

Correction de la question 3

On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$. Donc :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4} \times 3\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires.

Les points A, K, G sont alignés, et $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$.

Correction de la question 4

I est le milieu de $[BC]$: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

J est le milieu de $[AD]$: $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Le milieu P de $[IJ]$ vérifie :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AK}$$

$P = K$: K est le milieu de $[IJ]$.

Correction de la question 5

D'après la question 3, $K \in (AG)$. D'après la question 4, $K \in (IJ)$.

Le point K est commun aux droites (AG) et (IJ) .

Ces droites ne sont pas confondues. En effet, $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Et $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Ces coordonnées ne sont pas proportionnelles (le rapport $-\frac{3}{2}$ pour les deux premières, $\frac{3}{2}$ pour la troisième). Les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Les droites (AG) et (IJ) sont sécantes en K .

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : non-coplanarité des sommets d'un tétraèdre citée.
- **Q2** : Chasles utilisé pour faire apparaître $\overrightarrow{AG}$ à partir de la définition de G .
- **Q3** : relation $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ écrite, conclusion « colinéaires donc alignés ».
- **Q4** : milieux exprimés dans la base, calcul du milieu de $[IJ]$.
- **Q5** : point commun **et** vecteurs directeurs non colinéaires (unicité de la décomposition dans la base).

Exercice 3 : deux droites avec un paramètre, un plan et Python

Dans un repère de l'espace, on considère les droites :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$d_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = 3 + ms \\ z = 1 - s \end{cases}, s \in \mathbb{R}, \text{ où } m \text{ est un réel.}$$

1. Montrer que, quel que soit m , les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
2. Déterminer la valeur de m pour laquelle d_1 et d_2 sont sécantes. Donner alors les coordonnées de leur point d'intersection I .
3. Pour cette valeur de m , on note Π le plan contenant d_1 et d_2 . Le point $F(1; 10; 7)$ appartient-il à Π ? Le point $G(2; 3; 4)$?
4. On complète la fonction Python ci-dessous.

Quelles valeurs renvoie `sur_droite((5,0,1), (1,-2,3), (2,1,-1))` et `sur_droite((2,0,1), (1,-2,3), (2,1,-1))` ?

Interpréter.

```
from fractions import Fraction

def sur_droite(M, A, u):
    for i in range(3):
        if u[i] != 0:
            t = Fraction(M[i] - A[i], u[i])
            break
    return all(A[j] + t*u[j] == M[j] for j in range(3))
```

Correction de la question 1

Les vecteurs directeurs sont $\vec{u}_1(1; -1; 2)$ et $\vec{u}_2(2; m; -1)$.

S'ils étaient colinéaires, il existerait k tel que $\vec{u}_2 = k\vec{u}_1$. La première coordonnée donnerait $k = 2$. La troisième donnerait $-1 = 2k = 4$: contradiction.

Quel que soit m , $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires : d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

Correction de la question 2

On cherche t et s tels que :

$$1 + t = 2s, -t = 3 + ms, 2 + 2t = 1 - s$$

La première et la troisième équation ne contiennent pas m . La première donne $t = 2s - 1$. La troisième devient $2 + 2(2s - 1) = 1 - s$, soit $4s = 1 - s$, donc $s = \frac{1}{5}$ et $t = -\frac{3}{5}$.

La deuxième équation s'écrit alors $\frac{3}{5} = 3 + \frac{m}{5}$, donc $m = -12$.

Les droites sont sécantes si et seulement si $m = -12$.

Pour $t = -\frac{3}{5} : I \left(1 - \frac{3}{5}; \frac{3}{5}; 2 - \frac{6}{5} \right)$.

$$I \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right)$$

Vérification avec $s = \frac{1}{5} : \left(\frac{2}{5}; 3 - \frac{12}{5}; 1 - \frac{1}{5} \right) = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right)$

Correction de la question 3

Pour $m = -12$, d_1 et d_2 sont sécantes en I , non parallèles. Le plan Π passe par $A(1; 0; 2)$ et est dirigé par $\vec{u}_1(1; -1; 2)$ et $\vec{u}_2(2; -12; -1)$.

Le point F . $\vec{AF}(0; 10; 5)$. On cherche a, b tels que $\vec{AF} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$:

$$0 = a + 2b, 10 = -a - 12b, 5 = 2a - b$$

La première donne $a = -2b$. La troisième devient $5 = -4b - b$, donc $b = -1$ et $a = 2$. La deuxième est vérifiée : $-2 + 12 = 10$.

$F \in \Pi$.

Le point G . $\vec{AG}(1; 3; 2)$. On cherche a, b :

$$1 = a + 2b, 3 = -a - 12b, 2 = 2a - b$$

La première et la troisième donnent $a = 1$ et $b = 0$. La deuxième donne $-1 \neq 3$: elle n'est pas vérifiée.

$G \notin \Pi$.

Correction de la question 4

Pour le premier appel, $M(5; 0; 1)$, $A(1; -2; 3)$, $u(2; 1; -1)$: la première coordonnée donne $t = \frac{5-1}{2} = 2$. On vérifie : $-2 + 2 \times 1 = 0$ et $3 + 2 \times (-1) = 1$.

Le premier appel renvoie True.

Pour le second, $M(2;0;1) : t = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$. La deuxième coordonnée : $-2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \neq 0$.

Le second appel renvoie False.

Interprétation : le point $(5;0;1)$ est sur la droite, le point $(2;0;1)$ n'y est pas. On retrouve le résultat de la fiche 3 (exercice 1).

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : non-colinéarité justifiée **pour tout** m (la contradiction ne dépend pas de m).
- **Q2** : système écrit, résolution avec les deux équations sans m , **puis** la deuxième équation pour m , point d'intersection vérifié.
- **Q3** : plan défini par un point et deux vecteurs non colinéaires, système avec trois équations pour chaque point, conclusion pour chacun.
- **Q4** : valeurs renvoyées justifiées et interprétées.

Les réflexes à retenir

- Une **coplanarité** se démontre en exhibant $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$; une **non-coplanarité** avec un système sans solution.
- Deux droites **non parallèles** ne sont sécantes que si le **système a une solution** : écris-le, résous-le, vérifie.
- Un **paramètre** se trouve avec les équations qui n'en dépendent pas, puis la dernière équation.
- Dans un **tétraèdre**, la base $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ donne l'**unicité** de la décomposition.
- **Conclus** chaque question avec la position relative ou la propriété.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les exercices de géométrie dans l'espace des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.