

Guide de rédaction : vecteurs, droites et plans de l'espace

Ce guide complète le Guide de rédaction général. Il rassemble, pour le chapitre Vecteurs, droites et plans de l'espace, les **quinze situations qui reviennent au bac** et, pour chacune, la rédaction modèle.

Dans ce chapitre, une figure ne prouve rien. Le correcteur attend la **relation vectorielle** ou le **système** écrit, résolu et **vérifié**.

Le principe du chapitre

En géométrie dans l'espace, un correcteur regarde surtout **cinq choses** :

- la **relation vectorielle exhibée** ($\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$) ;
- la **non-colinéarité** justifiée avant d'utiliser un théorème ;
- le **système avec ses trois équations**, dont la troisième est **vérifiée** ;
- les **deux paramètres différents** (t et s) pour deux droites ;
- la **conclusion nommée** : alignés, coplanaires, sécantes, parallèles, non coplanaires.

1. Les quinze situations et leur rédaction modèle

Situation 1 : décomposer un vecteur avec Chasles.

« D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BJ}$. Or I est le milieu de $[EF]$, donc $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. De plus $\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$. »

Insère des points pour retomber sur les arêtes, et justifie chaque vecteur (milieu, arête égale).

Situation 2 : montrer un alignement avec des vecteurs.

« On a $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ car I est le milieu de $[BC]$. Donc $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires : les points A, J, I sont alignés. »

Écris la **relation** $\overrightarrow{AJ} = k\overrightarrow{AI}$, pas seulement « ça se voit ».

Situation 3 : montrer un alignement avec des coordonnées.

« $\overrightarrow{AB}(2;3;6)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;-3;-6)$. Donc $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs sont colinéaires : A, B, C sont alignés. »

Pour un paramètre m : « $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ donne $m-1=k$, $3=k$, $-6=-2k$. La deuxième donne $k=3$, la troisième est vérifiée, la première donne $m=4$. »

Situation 4 : un parallélogramme, donc des points coplanaires.

« $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EB}$. Donc $EIJB$ est un parallélogramme. Un parallélogramme est plan : les points E, I, J, B sont coplanaires, et $(IJ) \parallel (EB)$. »

Situation 5 : montrer que trois vecteurs sont coplanaires.

« $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles).

On cherche a, b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} : 2 = a, 5 = 2a + b, 1 = b$.

La première donne $a = 2$, la troisième $b = 1$.

La deuxième est vérifiée.

Donc $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$: les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires. »

Trois équations, deux pour résoudre, une pour vérifier.

Situation 6 : montrer que trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

« $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Supposons $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} : 1 = a, 1 = b, 1 = a + b$.

Les deux premières donnent $a = b = 1$, donc $a + b = 2 \neq 1$: la troisième est fausse.

Le système n'a pas de solution.

Donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas coplanaires. »

Conclus « non coplanaires » **seulement** après avoir montré que le système est **impossible**.

Situation 7 : quatre points sont-ils coplanaires ?

« $\overrightarrow{AB}(-1;1;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$ ne sont pas colinéaires : A, B, C définissent un plan.
 $\overrightarrow{AD}(0;1;-1)$.

On cherche a, b avec $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} : 0 = -a - b, 1 = a, -1 = b$.

Les deux dernières donnent $a = 1, b = -1$; la première est vérifiée.

Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} : A, B, C, D$ sont coplanaires. »

Situation 8 : justifier qu'on a une base de l'espace.

« $ABCD$ est un tétraèdre : A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

Donc $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires : ils forment une base de l'espace.

Tout vecteur s'écrit de manière unique $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$. »

Avec des coordonnées : montre que $\vec{w}$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (système impossible).

Situation 9 : donner une représentation paramétrique.

« La droite (AB) passe par $A(1;0;2)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(2;4;-4)$, ou $\vec{u}(1;2;-2)$.

Une représentation paramétrique est :

$x = 1 + t, y = 2t, z = 2 - 2t$, avec $t \in \mathbb{R}$. »

Situation 10 : un point appartient-il à une droite ?

« Pour $C(4;6;-4)$, la première coordonnée donne $4 = 1 + t$, soit $t = 3$. On vérifie : $y = 2 \times 3 = 6$ et $z = 2 - 2 \times 3 = -4$. Les trois coordonnées sont bonnes : $C \in (AB)$. »

Sinon : « pour $t = \frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2} \neq 0 : C \notin d$. »

Situation 11 : deux droites parallèles ou confondues.

« $\vec{u}_2(2;-2;4) = 2\vec{u}_1$: les vecteurs directeurs sont colinéaires, les droites sont parallèles.

Le point $B(3;0;4)$ de d_2 est sur d_1 (pour $t = 2 : y = 0, z = 4$).

Donc d_1 et d_2 sont confondues. »

Sinon : « $(2;1;1)$ n'est pas sur d_1 : les droites sont strictement parallèles. »

Situation 12 : deux droites sécantes.

« Les vecteurs directeurs $(1;-1;2)$ et $(1;0;1)$ ne sont pas colinéaires.

On résout $1 + t = 2 + s, 2 - t = 1, 2t = 2 + s$.

La deuxième donne $t = 1$, la première $s = 0$.

La troisième est vérifiée.

Les droites sont sécantes au point $(2;1;2)$. »

Deux paramètres différents (t et s). Donne le point à la fin.

Situation 13 : deux droites non coplanaires.

« Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

On résout $1 + t = s$, $2 - t = 0$, $2t = 1$.

La deuxième donne $t = 2$ et la troisième $t = \frac{1}{2}$: contradiction.

Le système n'a pas de solution.

Les droites ne sont ni parallèles ni sécantes : elles sont non coplanaires. »

Situation 14 : position d'une droite et d'un plan.

« Le plan P est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (non colinéaires).

Le vecteur directeur $\vec{w}$ de la droite Δ vérifie $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$: Δ est parallèle à P .

Le point $M(2; 1; 1)$ de Δ n'est pas dans P (système impossible).

Donc Δ est strictement parallèle à P . »

Si $\vec{w}$ n'est pas coplanaire avec $\vec{u}, \vec{v}$: « Δ et P sont sécants. On écrit $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ avec M sur Δ , on résout et on donne le point. »

Situation 15 : plans parallèles, théorème du toit.

Plans parallèles : « $\vec{u}' = 2\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{v}' = \vec{u} - \vec{v}$: les vecteurs de P' sont des combinaisons linéaires de ceux de P . Donc $P \parallel P'$. Comme $A' \notin P$, ils sont strictement parallèles. »

Théorème du toit : « Les plans (SAB) et (SCD) sont sécants (ils ont S en commun et ne sont pas confondus). $(AB) \subset (SAB)$, $(CD) \subset (SCD)$ et $(AB) \parallel (CD)$. D'après le théorème du toit, leur intersection est la droite passant par S parallèle à (AB) . »

2. Avant / après sur la géométrie dans l'espace**a) La coplanarité.**

« Les quatre points sont dans un même plan car la figure le montre. »

« $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires. Donc A, B, C, D sont coplanaires. »

b) Deux droites sécantes.

« Les droites ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes. »

« Les droites ne sont pas parallèles. Le système $1 + t = 2 + s$, $2 - t = 1$, $2t = 2 + s$ admet la solution $(t; s) = (1; 0)$. Elles sont sécantes en $(2; 1; 2)$. »

Dans l'espace, des droites non parallèles peuvent être **non coplanaires**.

c) Un point sur une droite.

« Pour $t = 2$, on trouve $x = 5$, donc $B \in d$. »

« Pour $t = 2$, $x = 5$; on vérifie $y = -2 + 2 = 0$ et $z = 3 - 2 = 1$. Les trois coordonnées de B sont obtenues : $B \in d$. »

d) Une droite parallèle à un plan.

« La droite (BD) est parallèle au plan car elle a l'air parallèle à (FH) . »

« $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AF}$: $\overrightarrow{BD}$ est combinaison linéaire de la base $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH})$ du plan (AFH) . Donc (BD) est parallèle à (AFH) . »

3. Les erreurs de rédaction propres à ce chapitre

- Se fier à la **figure** au lieu de justifier par un calcul.
- Utiliser le théorème de coplanarité avec deux vecteurs **colinéaires**.
- Oublier de **vérifier la troisième équation** dans un système à trois équations.
- Utiliser le **même paramètre t** pour deux droites.
- Conclure « sécantes » sans **donner le point** d'intersection.
- Conclure « non coplanaires » sans avoir prouvé la **non-colinéarité** des vecteurs directeurs.
- Confondre **incluse** et **strictement parallèle** pour une droite et un plan.
- Se tromper de signe dans « **arrivée moins départ** » pour les coordonnées d'un vecteur.

4. La check-list du chapitre

- J'ai écrit la **relation vectorielle** (colinéarité ou combinaison linéaire), pas seulement « on voit ».
- J'ai justifié la **non-colinéarité** avant d'utiliser le théorème de coplanarité.
- Mon système comporte **trois équations**, j'en ai résolu deux et **vérifié la troisième**.
- Pour deux droites, j'ai utilisé **deux paramètres différents** et **donné le point** d'intersection.
- Pour une droite et un plan, j'ai distingué **sécants, incluse, strictement parallèle**.
- Pour des plans parallèles, j'ai montré que les vecteurs de l'un sont des **combinaisons linéaires** de ceux de l'autre, et que les plans ne sont **pas confondus**.
- Mes coordonnées de vecteurs suivent « **arrivée moins départ** ».
- Ma **conclusion** nomme la position relative ou la propriété.

Une figure en perspective, c'est un bon plan pour se perdre. Un système écrit et vérifié, c'est une carte.