

## Vecteurs, droites et plans de l'espace

Fiche Standard

Nom : \_\_\_\_\_

Date : \_\_\_\_\_

### Exercice S1 : Coplanarité dans un tétraèdre

$ABCD$  est un tétraèdre. Le point  $I$  est le milieu de  $[AB]$ , le point  $J$  vérifie  $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$  et  $K$  est le milieu de  $[CD]$ . On rappelle que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$  est une base de l'espace.

1. Exprimer  $\overrightarrow{AI}$ ,  $\overrightarrow{AJ}$ ,  $\overrightarrow{AK}$  dans cette base, puis  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{IK}$ .
2. Montrer que  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{IK}$  ne sont pas colinéaires.
3. Soit  $L$  le point de la droite  $(AD)$  défini par  $\overrightarrow{AL} = t\overrightarrow{AD}$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ . Déterminer  $t$  pour que les points  $I, J, K, L$  soient coplanaires. Décrire alors la position de  $L$ .

### Exercice S2 : Un paramètre de coplanarité

Dans un repère de l'espace, on considère  $A(1; 0; 2)$ ,  $B(2; 1; 0)$ ,  $C(0; 3; 1)$  et, pour tout réel  $m$ , le point  $D_m(2; -1; m)$ .

1. Montrer que  $A, B, C$  ne sont pas alignés.
2. Déterminer l'unique valeur de  $m$  pour laquelle les points  $A, B, C, D_m$  sont coplanaires.
3. On prend  $m = 0$  et on note  $D = D_0$ . Justifier que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$  est une base de l'espace, puis déterminer les coordonnées de  $\vec{w}(6; -4; -9)$  dans cette base.

### Exercice S3 : Droites sécantes et paramètre

Dans un repère de l'espace, la droite  $d$  a pour représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$  et,

pour un réel  $m$ , la droite  $d'_m$  a pour représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 2 + s \\ y = m + 2s \\ z = -s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $d$  et  $d'_m$  ne sont parallèles pour aucune valeur de  $m$ .
2. Déterminer la valeur de  $m$  pour laquelle  $d$  et  $d'_m$  sont sécantes, et donner les coordonnées de leur point d'intersection.
3. Que peut-on dire de  $d$  et  $d'_0$ ? Justifier.

### Exercice S4 : Droite et plan : deux situations

Dans un repère de l'espace, on considère  $A(1; -1; 0)$ ,  $B(2; 1; 1)$ ,  $C(1; 0; 2)$  et  $D(1; 0; 3)$ . On note  $\Delta_1$  la droite passant par  $D$  de vecteur directeur  $\vec{u}_1(2; 2; -3)$  et  $\Delta_2$  la droite passant par  $D$  de vecteur directeur  $\vec{u}_2(1; 3; 3)$ .

1. Montrer que  $A, B, C$  ne sont pas alignés, puis que  $D \notin (ABC)$ .
2. Montrer que  $\Delta_2$  est strictement parallèle au plan  $(ABC)$ .
3. Montrer que  $\Delta_1$  coupe le plan  $(ABC)$ , puis déterminer les coordonnées du point d'intersection.
4. Montrer que  $(\vec{u}_1, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  est une base de l'espace, alors que  $(\vec{u}_2, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  n'en est pas une. Quel lien y a-t-il avec les questions 2 et 3?

### Exercice S5 : Plans parallèles, plans sécants

Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, le plan  $P$  est dirigé par  $\vec{u}(1; 0; 1)$  et  $\vec{v}(0; 1; 2)$  et passe par  $O$ . On note  $A'(1; 1; 1)$ ,  $\vec{u}' = \vec{u} + \vec{v}$  et  $\vec{v}' = 2\vec{u} + \vec{v}$ . Le plan  $P'$  passe par  $A'$  et est dirigé par  $\vec{u}'$  et  $\vec{v}'$ .

1. Montrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  d'une part,  $\vec{u}'$  et  $\vec{v}'$  d'autre part, ne sont pas colinéaires.
2. Montrer que  $P$  et  $P'$  sont strictement parallèles.
3. Soit  $B(1; 0; 0)$ ,  $\vec{w}(0; 1; 0)$  et  $P''$  le plan passant par  $B$  dirigé par  $\vec{u}'$  et  $\vec{w}$ . Déterminer l'intersection

de  $P$  et  $P''$ .

### Exercice S6 : Python : coplanarité de quatre points

On considère la fonction suivante et trois appels.

```
from fractions import Fraction
def coplanaires(A, B, C, D):
    u = (B[0]-A[0], B[1]-A[1], B[2]-A[2])
    v = (C[0]-A[0], C[1]-A[1], C[2]-A[2])
    w = (D[0]-A[0], D[1]-A[1], D[2]-A[2])
    delta = u[0]*v[1] - u[1]*v[0]
    a = Fraction(w[0]*v[1] - w[1]*v[0], delta)
    b = Fraction(u[0]*w[1] - u[1]*w[0], delta)
    return a*u[2] + b*v[2] == w[2]
coplanaires((0,0,0), (1,2,0), (0,1,1), (2,5,1)) # appel 1
coplanaires((0,0,0), (1,2,0), (0,1,1), (2,5,2)) # appel 2
coplanaires((0,0,0), (1,0,0), (1,0,1), (2,0,1)) # appel 3
```

1. Calculer à la main les valeurs de  $\delta$ ,  $a$  et  $b$  pour l'appel 1. Que renvoient les appels 1 et 2 ?
2. Expliquer le rôle de  $a$  et  $b$ , puis celui de la dernière ligne, en rapport avec le cours.
3. Que se passe-t-il pour l'appel 3 ? Pourquoi ? Les quatre points sont-ils pourtant coplanaires ?
4. Modifier la fonction pour éviter ce défaut (on admet que, si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires, l'un des nombres  $u_0v_1 - u_1v_0$ ,  $u_0v_2 - u_2v_0$ ,  $u_1v_2 - u_2v_1$  est non nul).

### Exercice S7 : Trajectoires de drones

Dans un repère de l'espace (unité : 100 m), trois drones  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  volent en ligne droite à vitesse constante. À l'instant  $t$  (en minutes,  $t \geq 0$ ), leurs positions respectives sont

$$D_1(t) = (2 + 3t; 1 + t; 10 - t), \quad D_2(t) = (2 + 2t; 6 - t; 5 + t), \quad D_3(t) = (10 - t; 1 + t; 4 + 2t).$$

1. Montrer que les droites supports des trajectoires de  $D_1$  et de  $D_2$  sont sécantes en un point  $I$  dont on donnera les coordonnées.
2. Les drones  $D_1$  et  $D_2$  se rencontrent-ils ? Justifier.
3. Montrer que  $D_1$  et  $D_3$  se rencontrent, et préciser l'instant et le lieu de la rencontre.
4. À quel instant  $D_2$  passe-t-il par le point  $I$  ? Comparer avec le résultat de la question 3.

### Exercice S8 : Un plan parallèle dans un cube

$ABCDEFGH$  est un cube et  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ ,  $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ . On note  $I$ ,  $J$ ,  $K$  les milieux respectifs de  $[EF]$ ,  $[FG]$ ,  $[BC]$ .

1. Exprimer  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{IK}$  en fonction de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$ .
2. Montrer que  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{IK}$  s'expriment comme combinaisons linéaires de  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AG}$ .
3. Montrer que  $I \notin (ACG)$ . En déduire que les plans  $(IJK)$  et  $(ACG)$  sont strictement parallèles.

### Exercice S9 : Python : une trajectoire rectiligne

Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , un objet se déplace sur la droite  $(AB)$  avec  $A(2; 1; 4)$  et  $B(5; -2; 1)$ . On utilise la fonction `point(A, u, t)` du cours (point  $A + t\vec{u}$ ).

1. Donner une représentation paramétrique de  $(AB)$  avec un vecteur directeur à petites coordonnées entières.
2. Que renvoie le script suivant ? Écrire les quatre lignes affichées.  

```
A = (2, 1, 4)
u = (1, -1, -1)
for t in range(-2, 5, 2):
    print(t, point(A, u, t))
```
3. Le plan  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est l'ensemble des points de cote nulle. Déterminer le point où la droite  $(AB)$  le coupe.

4. Le point  $C(8; -5; -2)$  appartient-il à  $(AB)$ ? À quelle valeur de  $t$  correspond-il?

**Exercice S10 : Milieux des arêtes d'un tétraèdre**

$ABCD$  est un tétraèdre. On note  $I, J, K, L$  les milieux respectifs de  $[AB], [BC], [CD], [DA]$ , et  $M, N$  les milieux respectifs de  $[AC]$  et  $[BD]$ .

1. Montrer que  $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ . En déduire que  $IJKL$  est un parallélogramme et que  $I, J, K, L$  sont coplanaires.
2. Montrer que les segments  $[IK], [JL]$  et  $[MN]$  ont le même milieu  $O$  et exprimer  $\overrightarrow{AO}$  dans la base  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ . Que peut-on dire des points  $M, O, N$ ?
3. Montrer que la droite  $(IJ)$  est strictement parallèle au plan  $(ACD)$ .