

Corrigé : Vecteurs, droites et plans de l'espace

Fiche Standard

S1.

1. I milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Par hypothèse $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. K milieu de $[CD]$: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.
Par Chasles :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

Dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$: $\overrightarrow{IJ}(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 0)$ et $\overrightarrow{IK}(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

2. Un vecteur s'écrit de manière unique dans une base. Si $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IJ}$, la troisième coordonnée donne $\frac{1}{2} = 0$: faux. Si $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{IK}$, la troisième coordonnée donne $0 = \frac{k}{2}$, donc $k = 0$ et $\overrightarrow{IJ} = \vec{0}$, faux (sa deuxième coordonnée est $\frac{1}{3}$).

Conclusion : $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires, donc I, J, K ne sont pas alignés.

3. $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD}$, de coordonnées $(-\frac{1}{2}; 0; t)$. Comme I, J, K définissent un plan, L est dans ce plan si et seulement s'il existe a, b tels que $\overrightarrow{IL} = a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{IK}$:

$$-\frac{1}{2} = -\frac{a}{2} - \frac{b}{2}, \quad 0 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}, \quad t = \frac{b}{2}.$$

La première donne $a + b = 1$, la deuxième $2a + 3b = 0$. On obtient $a = 3, b = -2$ (car $a = 1 - b$ puis $2 - 2b + 3b = 0$). La troisième donne $t = -1$.

Conclusion : I, J, K, L sont coplanaires si et seulement si $t = -1$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AL} = -\overrightarrow{AD}$: A est le milieu de $[DL]$.

S2.

1. $\overrightarrow{AB}(1; 1; -2)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 3; -1)$. Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, la première coordonnée donne $k = -1$, mais alors $3 = -1$: faux. Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, la première donne $k = -1$, et $1 = -3$: faux. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, A, B, C ne sont pas alignés.
2. $\overrightarrow{AD_m}(1; -1; m-2)$. Les quatre points sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AD_m} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$: $1 = a - b, -1 = a + 3b, m-2 = -2a - b$. Les deux premières équations donnent $4b = -2$, soit $b = -\frac{1}{2}$, puis $a = \frac{1}{2}$. La troisième s'écrit alors $m-2 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Conclusion : les points sont coplanaires si et seulement si $m = \frac{3}{2}$.

3. Pour $m = 0$, $\overrightarrow{AD}(1; -1; -2)$. D'après la question 2, $\overrightarrow{AD}$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (non colinéaires), car $0 \neq \frac{3}{2}$: les trois vecteurs ne sont pas coplanaires et forment une base de l'espace.

On cherche x, y, z tels que $\vec{w} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$:

$$x - y + z = 6, \quad x + 3y - z = -4, \quad -2x - y - 2z = -9.$$

La somme des deux premières équations donne $x + y = 1$. La première donne alors $z = 6 - x + y = 5 + 2y$. La troisième devient $-2(1 - y) - y - 2(5 + 2y) = -9$, soit $-12 - 3y = -9$ et $y = -1$. Donc $x = 2$ et $z = 3$.

Conclusion : $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD}$, de coordonnées $(2; -1; 3)$. Vérification : $(2 + 1 + 3; 2 - 3 - 3; -4 + 1 - 6) = (6; -4; -9)$.

S3.

1. Vecteurs directeurs : $\vec{u}(2; 1; -1)$ et $\vec{u}'(1; 2; -1)$, indépendants de m . Si $\vec{u}' = k\vec{u}$, la première coordonnée donne $k = \frac{1}{2}$, mais alors $2 = \frac{1}{2}$: faux. Si $\vec{u} = k\vec{u}'$, $k = 2$ et $1 = 4$: faux.

Conclusion : pour tout m , d et d'_m ne sont pas parallèles.

2. Un point commun correspond à $1 + 2t = 2 + s, -1 + t = m + 2s, 3 - t = -s$. La troisième donne $s = t - 3$. La première devient $1 + 2t = t - 1$, donc $t = -2$ et $s = -5$. La deuxième équation s'écrit

alors $-3 = m - 10$, soit $m = 7$.

Conclusion : d et d'_m sont sécantes si et seulement si $m = 7$, au point de coordonnées $(-3; -3; 5)$ (obtenu pour $t = -2$ ou $s = -5$).

3. Pour $m = 0$, les deux équations qui ne dépendent pas de m imposent $t = -2$ et $s = -5$, et la deuxième donne $-3 = -10$: faux. Le système n'a pas de solution.

Conclusion : d et d'_0 ne sont ni parallèles ni sécantes : elles sont non coplanaires.

S4.

1. $\overrightarrow{AB}(1; 2; 1)$, $\overrightarrow{AC}(0; 1; 2)$. Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, la première coordonnée donne $k = 0$, d'où $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$: faux. Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, la première donne $1 = 0$: faux. Donc A, B, C ne sont pas alignés. $\overrightarrow{AD}(0; 1; 3) = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ donne $0 = a$, $1 = 2a + b$, $3 = a + 2b$. Les deux premières équations donnent $a = 0$, $b = 1$; la troisième donne $3 = 2$: faux. Donc $D \notin (ABC)$.

2. $\vec{u}_2 = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$: $1 = a$, $3 = 2a + b$, $3 = a + 2b$. Les deux premières équations donnent $a = 1$, $b = 1$; la troisième est vérifiée ($1 + 2 = 3$). Donc $\vec{u}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$: Δ_2 est parallèle à (ABC) . Comme $D \in \Delta_2$ et $D \notin (ABC)$, Δ_2 n'est pas incluse dans le plan.

Conclusion : Δ_2 est strictement parallèle au plan (ABC) .

3. Avec $\vec{u}_1 = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$: $2 = a$, $2 = 2a + b$, $-3 = a + 2b$. Les deux premières équations donnent $a = 2$, $b = -2$; la troisième donne $-3 = -2$: faux. Le vecteur $\vec{u}_1$ n'est pas coplanaire avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: Δ_1 et (ABC) sont sécants.

Le point $M = D + t\vec{u}_1$ a pour coordonnées $(1 + 2t; 2t; 3 - 3t)$ et $\overrightarrow{AM}(2t; 2t + 1; 3 - 3t)$. Il est dans (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$: $2t = a$, $2t + 1 = 2a + b$, $3 - 3t = a + 2b$. Les deux premières donnent $a = 2t$ et $b = 1 - 2t$. La troisième s'écrit $2t + 2 - 4t = 3 - 3t$, soit $t = 1$.

Conclusion : Δ_1 coupe (ABC) au point $(3; 2; 0)$. Vérification : $A + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (1 + 2; -1 + 4 - 1; 2 - 2) = (3; 2; 0)$.

4. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. D'après la question 3, $\vec{u}_1$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: les trois vecteurs ne sont pas coplanaires et forment une base de l'espace. D'après la question 2, $\vec{u}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$: les trois vecteurs sont coplanaires, ce n'est pas une base.

Conclusion : une droite et un plan sont sécants lorsqu'un vecteur directeur de la droite et deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan forment une base ; ils sont parallèles lorsque ces trois vecteurs sont coplanaires.

S5.

1. $\vec{u}(1; 0; 1)$, $\vec{v}(0; 1; 2)$: si $\vec{v} = k\vec{u}$, la première coordonnée donne $k = 0$ puis $\vec{v} = \vec{0}$, faux ; si $\vec{u} = k\vec{v}$, la première donne $1 = 0$, faux. $\vec{u}' = \vec{u} + \vec{v} = (1; 1; 3)$ et $\vec{v}' = 2\vec{u} + \vec{v} = (2; 1; 4)$: si $\vec{v}' = k\vec{u}'$, la première coordonnée donne $k = 2$ et $1 = 2$, faux ; si $\vec{u}' = k\vec{v}'$, $k = \frac{1}{2}$ et $1 = \frac{1}{2}$, faux.

2. $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: les plans sont parallèles (confondus ou strictement parallèles). Ils sont confondus si et seulement si $A' \in P$. Or $\overrightarrow{OA'} = a\vec{u} + b\vec{v}$ donne $1 = a$, $1 = b$, $1 = a + 2b$: les deux premières donnent $a = b = 1$ et la troisième $1 = 3$, faux. Donc $A' \notin P$.

Conclusion : P et P' sont strictement parallèles.

3. Un point M est dans P'' si et seulement si $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + c\vec{u}' + d\vec{w} = (1 + c; c + d; 3c)$, avec $c, d \in \mathbb{R}$. Il est dans P si et seulement s'il existe a, b tels que $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v} = (a; b; a + 2b)$. On obtient $a = 1 + c$, $b = c + d$ et $3c = a + 2b = 1 + 3c + 2d$, donc $d = -\frac{1}{2}$. Réciproquement, pour $d = -\frac{1}{2}$ et tout c , on pose $a = 1 + c$ et $b = c - \frac{1}{2}$: on a bien $a + 2b = 3c$.

Conclusion : $P \cap P''$ est la droite de représentation paramétrique $x = 1 + c$, $y = -\frac{1}{2} + c$, $z = 3c$ ($c \in \mathbb{R}$) : elle passe par $(1; -\frac{1}{2}; 0)$ et est dirigée par $\vec{u}'$.

S6.

1. Appel 1 : $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$, $\vec{w} = (2, 5, 1)$. $\Delta_1 = 1 \times 1 - 2 \times 0 = 1$, $\Delta_2 = 2 \times 1 - 5 \times 0 = 2$, $\Delta_3 = 1 \times 5 - 2 \times 2 = 1$. Dernière ligne : $2 \times 0 + 1 \times 1 = 1 = \Delta_3$: l'appel 1 renvoie True. Appel 2 : $\vec{w} = (2, 5, 2)$, mêmes Δ_1 et Δ_2 , mais $1 \neq 2$: il renvoie False.
2. Δ_1 et Δ_2 sont les solutions des deux premières équations du système $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ (formules de Cramer, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires). La dernière ligne teste la troisième équation, comme dans la méthode du

cours : si elle est vérifiée, $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ et les points sont coplanaires.

3. Appel 3 : $\vec{u} = (1, 0, 0)$ et $\vec{v} = (1, 0, 1)$: $\text{delta} = 1 \times 0 - 0 \times 1 = 0$. La division par 0 dans **Fraction** provoque une erreur **ZeroDivisionError**. Pourtant $\vec{w} = (2, 0, 1) = \vec{u} + \vec{v}$: les quatre points sont coplanaires. Le défaut vient du choix des deux premières coordonnées : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des projections colinéaires sur ces coordonnées alors qu'ils ne sont pas colinéaires.

4. On teste successivement les couples de coordonnées $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$ jusqu'à trouver un déterminant non nul (il en existe un d'après l'indication) :

```
def coplanaires(A, B, C, D):
    u = (B[0]-A[0], B[1]-A[1], B[2]-A[2])
    v = (C[0]-A[0], C[1]-A[1], C[2]-A[2])
    w = (D[0]-A[0], D[1]-A[1], D[2]-A[2])
    for (i, j, k) in ((0, 1, 2), (0, 2, 1), (1, 2, 0)):
        delta = u[i]*v[j] - u[j]*v[i]
        if delta != 0:
            a = Fraction(w[i]*v[j] - w[j]*v[i], delta)
            b = Fraction(u[i]*w[j] - u[j]*w[i], delta)
            return a*u[k] + b*v[k] == w[k]
```

Pour l'appel 3, le couple $(0, 1)$ donne $\delta = 0$, le couple $(0, 2)$ donne $\delta = 1$, $a = b = 1$, et $au_1 + bv_1 = 0 = w_1$: la fonction renvoie **True**. La fonction suppose A, B, C non alignés.

S7.

1. Directions : $\vec{u}_1(3; 1; -1)$ et $\vec{u}_2(2; -1; 1)$, non colinéaires (si $\vec{u}_2 = k\vec{u}_1$, $k = \frac{2}{3}$ et $-1 = \frac{2}{3}$, faux). Si $D_1(t) = D_2(s)$: $2 + 3t = 2 + 2s$, $1 + t = 6 - s$, $10 - t = 5 + s$. La première donne $s = \frac{3t}{2}$; la deuxième $1 + t = 6 - \frac{3t}{2}$, soit $t = 2$, $s = 3$. Troisième équation : $10 - 2 = 8 = 5 + 3$, vérifiée.

Conclusion : les droites sont sécantes en $I(8; 3; 8)$.

2. D_1 et D_2 se rencontrent si $D_1(t) = D_2(t)$ pour un même t . La première coordonnée donne $2 + 3t = 2 + 2t$, soit $t = 0$; or $D_1(0) = (2; 1; 10) \neq D_2(0) = (2; 6; 5)$.

Conclusion : D_1 et D_2 ne se rencontrent pas (leurs trajectoires se croisent en I , mais pas au même instant).

3. $D_1(t) = D_3(t)$: $2 + 3t = 10 - t$, $1 + t = 1 + t$, $10 - t = 4 + 2t$. La première donne $t = 2$, la troisième aussi ($6 = 3t$), la deuxième est toujours vraie.

Conclusion : D_1 et D_3 se rencontrent à l'instant $t = 2$ min au point $(8; 3; 8)$.

4. $D_2(3) = (8; 3; 8) = I$. Le drone D_2 passe par I à $t = 3$, soit une minute après la rencontre de D_1 et D_3 (qui a lieu en I à $t = 2$). Les trois trajectoires sont concourantes en I , mais D_2 n'est pas en collision.

S8.

1. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ (I milieu de $[EF]$, J milieu de $[FG]$ et $\overrightarrow{FG} = \vec{v}$). $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{v}$ ($\overrightarrow{FB} = -\vec{w}$, K milieu de $[BC]$).

2. $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$. Alors $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Pour $\overrightarrow{IK}$, on cherche $\overrightarrow{IK} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AG}$: en $\vec{w}$, $-1 = \beta$; en $\vec{u}$, $\frac{1}{2} = \alpha + \beta$, donc $\alpha = \frac{3}{2}$ (la coordonnée en $\vec{v}$ donne la même équation). Vérification : $\frac{3}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$.

Conclusion : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG}$.

3. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas colinéaires (seul $\overrightarrow{AG}$ a une composante sur $\vec{w}$) : $(ACG) = (A; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG})$. On a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{u}$. Si $\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AG}$, alors $\frac{1}{2} = \alpha + \beta$ (en $\vec{u}$), $0 = \alpha + \beta$ (en $\vec{v}$), $1 = \beta$ (en $\vec{w}$) : les deux premières équations sont incompatibles. Donc $I \notin (ACG)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$, de coordonnées $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$ et $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, ne sont pas colinéaires : $(IJK) = (I; \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK})$. Ces deux vecteurs sont combinaisons linéaires de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG}$ (question 2) : les plans (IJK) et (ACG) sont parallèles. Ils ne sont pas confondus car $I \in (IJK)$ et $I \notin (ACG)$.

Conclusion : (IJK) et (ACG) sont strictement parallèles.

S9.

- $\overrightarrow{AB}(3; -3; -3) = 3\vec{u}$ avec $\vec{u}(1; -1; -1)$. Représentation paramétrique de $(AB) : x = 2 + t, y = 1 - t, z = 4 - t$ ($t \in \mathbb{R}$).
- Le script affiche les points pour $t = -2, 0, 2, 4$:
 -2 (0, 3, 6)
 0 (2, 1, 4)
 2 (4, -1, 2)
 4 (6, -3, 0)
- La cote vaut 0 si $4 - t = 0$, soit $t = 4$. Le point obtenu est $(6; -3; 0)$ (dernière ligne affichée).
Conclusion : la droite (AB) coupe le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ au point $(6; -3; 0)$.
- $x = 8$ donne $t = 6$. Alors $y = 1 - 6 = -5$ et $z = 4 - 6 = -2$: les trois coordonnées sont celles de C .
Conclusion : $C \in (AB)$, pour $t = 6$.

S10.

- Par Chasles, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} : IJKL$ est un parallélogramme. Un parallélogramme est plan.
Conclusion : I, J, K, L sont coplanaires.
- Avec $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$, le milieu de chacun des trois segments a pour vecteur position (depuis A)

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AL}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

Conclusion : les trois segments ont le même milieu O , avec $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. Comme O est le milieu de $[MN]$, les points M, O, N sont alignés.

- $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur du plan $(ACD) = (A; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$: la droite (IJ) est parallèle à ce plan (ou incluse). Or $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; 0; 0)$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Si $I \in (ACD)$, on aurait $\overrightarrow{AI} = a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AD}$, donc, par unicité de la décomposition, $\frac{1}{2} = 0$: faux. Donc $I \notin (ACD)$.
Conclusion : (IJ) est strictement parallèle au plan (ACD) .