

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Fiche Défi

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Unicité de la décomposition dans une base

Trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont dits *coplanaires* s'il existe un triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ tel que $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} = \vec{0}$ (propriété admise : elle équivaut à la définition du cours). Ils forment une *base* lorsqu'ils ne sont pas coplanaires. On suppose que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base et que, pour des réels x, y, z, x', y', z' ,

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}.$$

1. Montrer que $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$, puis que $x = x', y = y', z = z'$.
2. En déduire que tout vecteur s'écrit de manière unique $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et que

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{0} \implies x = y = z = 0.$$

Exercice D2 : Théorème du toit

Soient P_1 et P_2 deux plans sécants suivant une droite Δ . Soit d_1 une droite de P_1 et d_2 une droite de P_2 , parallèles, de vecteur directeur commun $\vec{e}$. On complète : P_1 est dirigé par $(\vec{e}, \vec{a})$ et P_2 par $(\vec{e}, \vec{b})$ (avec $\vec{e}, \vec{a}$ non colinéaires, et $\vec{e}, \vec{b}$ non colinéaires). Soit $\vec{n}$ un vecteur directeur de Δ . *Les questions 1 à 3 démontrent le « théorème du toit », qui ne figure pas explicitement au programme : pour aller plus loin, hors programme.*

1. Justifier qu'il existe des réels $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ tels que $\vec{n} = \lambda\vec{e} + \mu\vec{a} = \lambda'\vec{e} + \mu'\vec{b}$.
2. On suppose $\mu \neq 0$. Exprimer $\vec{a}$ en fonction de $\vec{e}$ et $\vec{b}$. En déduire que P_1 et P_2 sont parallèles et obtenir une contradiction.
3. Conclure que Δ est parallèle à d_1 et à d_2 .
4. **Application.** Dans le cube $ABCDEFGH$, on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, et on note Ω le centre du carré $ABFE$. Montrer que Ω appartient aux plans (BCE) et (ADG) , puis que $B \notin (ADG)$. Déterminer l'intersection de ces deux plans.

Exercice D3 : Un critère d'appartenance au plan (BCD)

$ABCD$ est un tétraèdre. Pour tout point M , on appelle $(x; y; z)$ ses coordonnées dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}.$$

1. Montrer que $M \in (BCD)$ si et seulement si $x + y + z = 1$. (On pourra écrire $\overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{BD}$.)
2. Le point G est défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$. Montrer que la droite (AG) coupe le plan (BCD) en un unique point G' , et que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG'}$.
3. Pour quelle valeur de k le point P_k défini par $\overrightarrow{AP_k} = k\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ appartient-il à (BCD) ?

Exercice D4 : Familles de vecteurs et bases

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace. On pose $\vec{p} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{q} = \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{r} = \vec{w} + \vec{u}$ et $\vec{p}' = \vec{u} - \vec{v}$, $\vec{q}' = \vec{v} - \vec{w}$, $\vec{r}' = \vec{w} - \vec{u}$. On utilise la propriété de l'exercice D1 (unicité de la décomposition) et la caractérisation de la coplanarité par une relation non triviale.

1. Montrer que $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ est une base de l'espace.
2. Les vecteurs $\vec{p}', \vec{q}', \vec{r}'$ sont-ils coplanaires ? Justifier.
3. Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$, puis déterminer les coordonnées de $\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}$ dans la base $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$.

Exercice D5 : Droites de l'espace et point mobile

On considère le cube $ABCDEFGH$ muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Pour $t \in [0; 1]$, M_t est le point de $[AE]$ tel que $\overrightarrow{AM_t} = t\overrightarrow{AE}$ et N est le milieu de $[CG]$.

1. Donner les coordonnées de B , H , N et M_t .
2. Montrer que, pour tout $t \in [0; 1]$, les droites (BH) et (M_tN) ne sont pas parallèles.
3. Déterminer la valeur de t pour laquelle (BH) et (M_tN) sont sécantes, et le point d'intersection.
4. Que peut-on dire de (BH) et (M_tN) lorsque $t \neq \frac{1}{2}$? Interpréter géométriquement le cas $t = \frac{1}{2}$.

Exercice D6 : Une droite s'appuyant sur deux droites

Dans un repère de l'espace, d_1 est l'axe des abscisses (droite passant par O de vecteur directeur $\vec{i}$) et d_2 est la droite passant par $A(0; 1; 0)$ de vecteur directeur $\vec{k}(0; 0; 1)$. On note $P(1; 2; 3)$.

1. Montrer que d_1 et d_2 sont non coplanaires.
2. Montrer qu'il existe une unique droite Δ passant par P et coupant à la fois d_1 et d_2 . On note M et N ses points d'intersection avec d_1 et d_2 . (On écrira $M(m; 0; 0)$, $N(0; 1; n)$ et on traduira l'alignement de P , M , N .)
3. Donner une représentation paramétrique de Δ .

Exercice D7 : Section d'un cube par un plan

On considère le cube $ABCDEFGH$ muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Les points I , J , K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$.

1. Donner les coordonnées de I , J , K et montrer que ces points ne sont pas alignés.
2. Soit $M(X; Y; Z)$. Montrer que $M \in (IJK)$ si et seulement si $Y = X + Z - \frac{1}{2}$. (On écrira $\overrightarrow{IM} = a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{IK}$.)
3. On pose $\varphi(X, Y, Z) = X - Y + Z$. Calculer φ en chacun des huit sommets du cube. Sur une arête $[PQ]$, les points sont $P + s\overrightarrow{PQ}$ avec $s \in [0; 1]$; exprimer φ en fonction de s . En déduire les arêtes qui rencontrent le plan (IJK) et les points d'intersection.
4. Montrer que la section du cube par le plan (IJK) est un hexagone dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.