

Corrigé : Vecteurs, droites et plans de l'espace

Fiche Défi

D1.

1. En soustrayant les deux écritures : $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$. Si le triplet $(x - x', y - y', z - z')$ était différent de $(0, 0, 0)$, on aurait une relation non triviale entre $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, qui seraient alors coplanaires : cela contredit le fait que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base.

Conclusion : $x - x' = y - y' = z - z' = 0$, soit $x = x', y = y', z = z'$.

2. Tout vecteur s'écrit $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (propriété d'une base, cours) et la question 1 montre que les réels x, y, z sont uniques. Avec $(x', y', z') = (0, 0, 0)$: si $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$, alors $x = y = z = 0$.

D2.

1. Δ est contenue dans P_1 : un vecteur directeur $\vec{n}$ de Δ est un vecteur de la direction de P_1 , donc combinaison linéaire de la base $(\vec{e}, \vec{a})$: $\vec{n} = \lambda\vec{e} + \mu\vec{a}$. De même $\Delta \subset P_2$ donne $\vec{n} = \lambda'\vec{e} + \mu'\vec{b}$.
2. On a $\lambda\vec{e} + \mu\vec{a} = \lambda'\vec{e} + \mu'\vec{b}$, donc $\mu\vec{a} = (\lambda' - \lambda)\vec{e} + \mu'\vec{b}$. Si $\mu \neq 0$:

$$\vec{a} = \frac{\lambda' - \lambda}{\mu} \vec{e} + \frac{\mu'}{\mu} \vec{b}.$$

Les vecteurs $\vec{e}$ et $\vec{a}$ qui dirigent P_1 sont alors des combinaisons linéaires de $\vec{e}$ et $\vec{b}$ qui dirigent P_2 : d'après le cours, P_1 et P_2 sont parallèles (confondus ou strictement parallèles). Cela contredit l'hypothèse « sécants suivant une droite ». Donc $\mu = 0$.

3. Alors $\vec{n} = \lambda\vec{e}$, avec $\lambda \neq 0$ car $\vec{n} \neq \vec{0}$.

Conclusion : $\vec{n}$ est colinéaire à $\vec{e}$, donc Δ est parallèle à d_1 et à d_2 .

4. Dans le cube, Ω est le milieu de $[BE]$ et de $[AF]$ (diagonales du carré $ABFE$). Le point Ω est sur la droite $(BE) \subset (BCE)$. Pour (ADG) : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD}$. Donc $F \in (A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG}) = (ADG)$, la droite (AF) est dans ce plan et $\Omega \in (ADG)$.

$B \notin (ADG)$: on a $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, non colinéaires, et $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = a\vec{v} + b(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$ donnerait $1 = b$ (en $\vec{u}$) et $0 = b$ (en $\vec{w}$) : impossible.

Les plans (BCE) et (ADG) ont donc le point Ω en commun et sont distincts ($B \in (BCE)$, $B \notin (ADG)$) : ils sont sécants suivant une droite Δ passant par Ω . La droite (BC) est dans (BCE) , la droite (AD) est dans (ADG) et $(BC) \parallel (AD)$. D'après le théorème du toit :

Conclusion : l'intersection de (BCE) et (ADG) est la droite passant par Ω et parallèle à (AD) .

D3.

1. Comme B, C, D ne sont pas alignés (tétraèdre), $(BCD) = (B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ et $M \in (BCD)$ si et seulement s'il existe a, b tels que $\overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{BD}$. Par Chasles, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, d'où

$$\overrightarrow{AM} = (1 - a - b)\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AD}.$$

Si $M \in (BCD)$, l'unicité de la décomposition dans la base donne $x = 1 - a - b$, $y = a$, $z = b$, donc $x + y + z = 1$. Réciproquement, si $x + y + z = 1$, on pose $a = y$, $b = z$: alors $1 - a - b = x$ et $\overrightarrow{AM} = (1 - a - b)\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AD}$, soit $\overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{BD}$.

Conclusion : $M \in (BCD) \iff x + y + z = 1$.

2. Un point de (AG) vérifie $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$, de coordonnées $(\frac{t}{4}; \frac{t}{4}; \frac{t}{4})$. Il est dans (BCD) si et seulement si $\frac{3t}{4} = 1$, soit $t = \frac{4}{3}$: une seule valeur, donc un seul point G' , avec $\overrightarrow{AG'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Conclusion : (AG) coupe (BCD) en $G'(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG'}$.

3. $P_k \in (BCD)$ si et seulement si $k + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1$, soit $k = \frac{1}{6}$.

D4.

1. Soit $\alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r} = \vec{0}$. Alors $(\alpha + \gamma)\vec{u} + (\alpha + \beta)\vec{v} + (\beta + \gamma)\vec{w} = \vec{0}$. D'après D1 : $\alpha + \gamma = 0$, $\alpha + \beta = 0$, $\beta + \gamma = 0$. Les deux premières donnent $\gamma = \beta = -\alpha$, la troisième $-2\alpha = 0$: $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Aucune relation non triviale n'existe.

Conclusion : $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ ne sont pas coplanaires : c'est une base de l'espace.

2. $\vec{p}' + \vec{q}' + \vec{r}' = (\vec{u} - \vec{v}) + (\vec{v} - \vec{w}) + (\vec{w} - \vec{u}) = \vec{0}$. C'est une relation non triviale (coefficients 1, 1, 1).

Conclusion : $\vec{p}'$, $\vec{q}'$, $\vec{r}'$ sont coplanaires (par exemple $\vec{r}' = -\vec{p}' - \vec{q}'$).

3. $\vec{p} + \vec{r} - \vec{q} = 2\vec{u}$, donc $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{p} - \vec{q} + \vec{r})$. Pour $\vec{x}$, on cherche $\vec{x} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r} = (\alpha + \gamma)\vec{u} + (\alpha + \beta)\vec{v} + (\beta + \gamma)\vec{w}$. Par unicité : $\alpha + \gamma = 2$, $\alpha + \beta = -1$, $\beta + \gamma = 3$. La somme donne $\alpha + \beta + \gamma = 2$, d'où $\beta = 2 - 2 = 0$, $\gamma = 2 - (-1) = 3$, $\alpha = 2 - 3 = -1$.

Conclusion : $\vec{x}(-1; 0; 3)$ dans la base $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$. Vérification : $-(\vec{u} + \vec{v}) + 3(\vec{w} + \vec{u}) = 2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}$.

D5.

1. $B(1; 0; 0)$, $H(0; 1; 1)$, $C(1; 1; 0)$, $G(1; 1; 1)$ donc $N(1; 1; \frac{1}{2})$, et $M_t(0; 0; t)$.
2. $\overrightarrow{BH}(-1; 1; 1)$ et $\overrightarrow{M_tN}(1; 1; \frac{1}{2} - t)$. Si $\overrightarrow{M_tN} = k\overrightarrow{BH}$, la première coordonnée donne $k = -1$ et la deuxième $1 = -1$: impossible, pour tout t .

Conclusion : (BH) et (M_tN) ne sont jamais parallèles.

3. Points de (BH) : $(1 - s; s; s)$; points de (M_tN) : $(r; r; t + r(\frac{1}{2} - t))$. Un point commun vérifie $1 - s = r$, $s = r$, $s = t + r(\frac{1}{2} - t)$. Les deux premières équations donnent $s = r = \frac{1}{2}$. La troisième devient $\frac{1}{2} = t + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$, soit $t = \frac{1}{2}$.

Conclusion : (BH) et (M_tN) sont sécantes si et seulement si $t = \frac{1}{2}$, au point $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

4. Si $t \neq \frac{1}{2}$, les droites ne sont pas parallèles (question 2) et le système n'a pas de solution (question 3) : elles sont non coplanaires. Pour $t = \frac{1}{2}$, M_t est le milieu de $[AE]$ et le point d'intersection $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ est le centre du cube, milieu commun de $[BH]$ et de $[M_tN]$ (milieu de $M(0; 0; \frac{1}{2})$ et $N(1; 1; \frac{1}{2})$).

D6.

1. Vecteurs directeurs $\vec{i}(1; 0; 0)$ et $\vec{k}(0; 0; 1)$, non colinéaires : d_1 et d_2 ne sont pas parallèles. Un point commun $(t; 0; 0) = (0; 1; s)$ imposerait $0 = 1$ (deuxième coordonnée) : impossible.

Conclusion : d_1 et d_2 ne sont ni parallèles ni sécantes : elles sont non coplanaires.

2. Une droite passant par P et coupant d_1 en $M(m; 0; 0)$ et d_2 en $N(0; 1; n)$ vérifie : P, M, N alignés. Comme $P \notin d_2$ (sa première coordonnée est $1 \neq 0$), $N \neq P$ et $\overrightarrow{PN} \neq \vec{0}$, donc l'alignement équivaut à $\overrightarrow{PM} = k\overrightarrow{PN}$ pour un réel k . Avec $\overrightarrow{PM}(m - 1; -2; -3)$ et $\overrightarrow{PN}(-1; -1; n - 3)$: $m - 1 = -k$, $-2 = -k$, $-3 = k(n - 3)$. La deuxième donne $k = 2$, la première $m = -1$, la troisième $-3 = 2n - 6$, soit $n = \frac{3}{2}$. Les points $M(-1; 0; 0)$ et $N(0; 1; \frac{3}{2})$ sont donc imposés; la droite (MN) passe par P ($\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{PN}$).

Conclusion : il existe une seule droite Δ passant par P et coupant d_1 et d_2 ; elle coupe d_1 en $M(-1; 0; 0)$ et d_2 en $N(0; 1; \frac{3}{2})$.

3. $\overrightarrow{PM}(-2; -2; -3)$, donc $\vec{u}(2; 2; 3)$ dirige Δ . Représentation paramétrique : $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 2t$, $z = 3 + 3t$ ($t \in \mathbb{R}$).

Vérification : $t = -1$ donne $M(-1; 0; 0)$ et $t = -\frac{1}{2}$ donne $N(0; 1; \frac{3}{2})$.

D7.

1. $I(\frac{1}{2}; 0; 0)$, $J(1; \frac{1}{2}; 0)$, $K(1; 1; \frac{1}{2})$. Donc $\overrightarrow{IJ}(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$ et $\overrightarrow{IK}(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2})$. Si $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IJ}$, la troisième coordonnée donne $\frac{1}{2} = 0$: faux. Si $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{IK}$, la troisième donne $k = 0$ puis $\overrightarrow{IJ} = \vec{0}$: faux. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : I, J, K ne sont pas alignés.

2. $\overrightarrow{IM}(X - \frac{1}{2}; Y; Z) = a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{IK}$ s'écrit $X - \frac{1}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$, $Y = \frac{a}{2} + b$, $Z = \frac{b}{2}$. La troisième donne $b = 2Z$, la première $a = 2X - 1 - 2Z$, et la deuxième devient $Y = X - \frac{1}{2} - Z + 2Z = X + Z - \frac{1}{2}$. Réciproquement, si $Y = X + Z - \frac{1}{2}$, les valeurs $b = 2Z$ et $a = 2X - 1 - 2Z$ vérifient les trois équations.

Conclusion : $M \in (IJK) \iff Y = X + Z - \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\varphi(X, Y, Z) = \frac{1}{2}$.

3. Valeurs de φ : $A : 0$, $B : 1$, $C : 1 - 1 = 0$, $D : -1$, $E : 1$, $F : 2$, $G : 1$, $H : 0$. Sur $[PQ]$, $\varphi(P + s\overrightarrow{PQ}) = \varphi(P) + s(\varphi(Q) - \varphi(P))$, fonction affine de s , qui vaut $\frac{1}{2}$ pour au plus une valeur de s , dans $[0; 1]$ si et seulement si $\frac{1}{2}$ est strictement compris entre $\varphi(P)$ et $\varphi(Q)$ (aucun sommet n'est dans le plan).

Arêtes concernées (valeurs aux extrémités) : $[AB]$ (0 et 1), $[BC]$ (1 et 0), $[CG]$ (0 et 1), $[GH]$ (1 et 0), $[HE]$ (0 et 1), $[EA]$ (1 et 0). Pour les six autres arêtes, $[CD]$ (0, -1), $[DA]$ (-1, 0), $[EF]$ (1, 2),

$[FG] (2, 1)$, $[BF] (1, 2)$, $[DH] (-1, 0)$, la valeur $\frac{1}{2}$ n'est pas atteinte. Dans chaque arête concernée $s = \frac{1}{2}$ (les valeurs aux extrémités différent de ± 1).

Conclusion : le plan (IJK) coupe exactement six arêtes, en leurs milieux : I sur $[AB]$, J sur $[BC]$, K sur $[CG]$, $L (\frac{1}{2}; 1; 1)$ sur $[GH]$, $M (0; \frac{1}{2}; 1)$ sur $[HE]$, $N (0; 0; \frac{1}{2})$ sur $[EA]$.

4. Deux points consécutifs de la liste I, J, K, L, M, N (et le couple N, I) appartiennent à une même face : $ABCD$, $BCGF$, $CDHG$, $EFGH$, $ADHE$, $ABFE$ respectivement. La section est donc l'hexagone $IJKLMN$. Les côtés :

$$\overrightarrow{IJ} (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0), \overrightarrow{JK} (0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}), \overrightarrow{KL} (-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}), \overrightarrow{LM} (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0), \overrightarrow{MN} (0; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}), \overrightarrow{NI} (\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}).$$

Ainsi $\overrightarrow{LM} = -\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{JK}$, $\overrightarrow{NI} = -\overrightarrow{KL}$.

Conclusion : la section est un hexagone dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux (et de même longueur).