

Vecteurs, droites et plans de l'espace

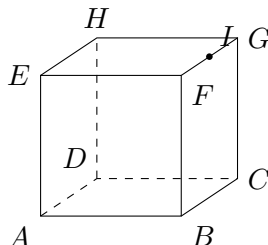
Fiche Bases

Nom : _____

Date : _____

Exercice B1 : Calcul vectoriel dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$. Le point I est le milieu de $[FG]$.



- Exprimer en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ les vecteurs suivants.
a) $\overrightarrow{AG}$; b) $\overrightarrow{BH}$; c) $\overrightarrow{CE}$; d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC}$.
- Simplifier $\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{HG}$.
- Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Exercice B2 : Coordonnées de vecteurs et de points

Dans un repère de l'espace, on considère $A(1; -2; 3)$, $B(4; 0; -1)$ et $C(-2; 5; 2)$.

- Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
- Calculer les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
- Calculer les coordonnées du milieu M de $[BC]$.
- Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice B3 : Points alignés

Dans un repère de l'espace, on considère $A(2; -1; 4)$, $B(5; 1; 0)$, $C(11; 5; -8)$ et $D(8; 4; -6)$.

- Montrer que A , B , C sont alignés.
- Les points A , B , D sont-ils alignés? Justifier.
- Déterminer les réels m et n tels que le point $E(m; 3; n)$ appartienne à la droite (AB) .

Exercice B4 : Vecteurs coplanaires

Dans une base de l'espace, on donne $\vec{u}(2; -1; 1)$, $\vec{v}(1; 0; 3)$, $\vec{w}(4; -1; 7)$ et $\vec{t}(4; -1; 5)$.

- Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
- Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.
- Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{t}$ sont-ils coplanaires? Justifier.

Exercice B5 : Représentations paramétriques

Dans un repère de l'espace, la droite d passe par $A(2; -1; 4)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(3; 0; -2)$.

- Donner une représentation paramétrique de d .
- Déterminer les coordonnées des points de d obtenus pour $t = 1$, $t = -1$ et $t = 2$.
- Le point $C(5; -1; 3)$ appartient-il à d ? Justifier.
- Donner une représentation paramétrique de la droite (PQ) avec $P(1; 3; -2)$ et $Q(4; 1; 2)$, puis les coordonnées du point de (PQ) obtenu pour $t = -1$.

Exercice B6 : Vrai ou faux

Dans un repère de l'espace, la droite d a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

1. Le vecteur $(-4; 2; -8)$ est un vecteur directeur de d .
2. Le point $B(5; 1; 7)$ appartient à d .
3. La droite Δ de représentation paramétrique $x = 5 + 2s$, $y = 1 - s$, $z = 6 + 4s$ ($s \in \mathbb{R}$) est confondue avec d .

Exercice B7 : Positions relatives de deux droites

Dans un repère de l'espace, la droite d passe par $A(2; 1; -1)$ de vecteur directeur $\vec{u}(1; -2; 1)$. La droite d' passe par $B(1; -2; -2)$ de vecteur directeur $\vec{v}(2; 1; 2)$.

1. Montrer que d et d' ne sont pas parallèles.
2. Montrer que d et d' sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
3. La droite d'' passe par $B'(1; -2; -1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}$. Les droites d et d'' sont-elles sécantes? Que peut-on en conclure?

Exercice B8 : Point et plan

Dans un repère de l'espace, on considère $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(3; -1; -1)$ et $E(2; 1; 1)$.

1. Montrer que A , B , C ne sont pas alignés.
2. Montrer que D appartient au plan (ABC) .
3. Le point E appartient-il au plan (ABC) ? Justifier.

Exercice B9 : Droite parallèle à un plan

Dans le cube $ABCDEFGH$, on munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées de B , D , E , F , H et en déduire celles de $\overrightarrow{BD}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{BD}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$. Que peut-on dire de (BD) et du plan (EFH) ?
3. Montrer que B n'appartient pas au plan (EFH) . Conclure sur la position relative de (BD) et (EFH) .

Exercice B10 : Python : points alignés

On utilise les fonctions suivantes.

```
def vecteur(A, B):
    return (B[0] - A[0], B[1] - A[1], B[2] - A[2])
```

```
def colineaires(u, v):
    return (u[1]*v[2] - u[2]*v[1] == 0
            and u[2]*v[0] - u[0]*v[2] == 0
            and u[0]*v[1] - u[1]*v[0] == 0)
```

```
def alignes(A, B, C):
    return colineaires(vecteur(A, B), vecteur(A, C))
```

On pose $P = (0, 1, 2)$, $Q = (2, 2, 5)$, $R = (6, 4, 11)$ et $S = (4, 3, 7)$.

1. Calculer à la main $\text{vecteur}(P, Q)$, $\text{vecteur}(P, R)$ et $\text{vecteur}(P, S)$.
2. Que renvoient $\text{alignes}(P, Q, R)$ et $\text{alignes}(P, Q, S)$? Justifier par le calcul.
3. Que renvoie $\text{colineaires}((0, 0, 0), (1, 2, 3))$? Quelle propriété du cours cela illustre-t-il?

Exercice B11 : Translations

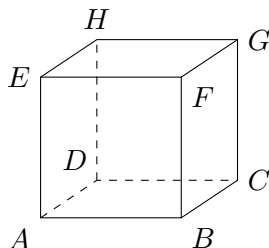
1. $ABCDEFGH$ est un cube (même figure que dans l'exercice B1). On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$. Déterminer les images par t des points A , B , E , F , puis les images de la droite (AB) et de la face $ABFE$.
2. On note t' la translation de vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Déterminer les images par t' des points A et E .

Quelle est l'image du segment $[AE]$?

3. Dans un repère de l'espace, on donne $A(1; 2; 3)$, $B(0; -1; 4)$ et $\vec{w}(2; -1; 5)$. On note t'' la translation de vecteur $\vec{w}$, A' et B' les images de A et B . Calculer les coordonnées de A' et B' , puis vérifier que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. Quel est le point dont l'image par t'' est l'origine O ?

Exercice B12 : Représenter et lire sur une figure

$ABCDEFGH$ est un cube. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.



1. Sur une reproduction de la figure, placer le point M défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$, puis le point N défini par $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Identifier ces deux points.
2. Pour chacun des triplets suivants, dire s'il forme une base de l'espace (lecture sur la figure, sans calcul) : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG})$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AE})$.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}$ forment-ils une base des vecteurs du plan (ABF) ? Et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$?
4. Lire sur la figure la décomposition de $\overrightarrow{DF}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, puis celle de $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AE})$.