

Corrigé : Vecteurs, droites et plans de l'espace

Fiche Bases

B1.

- Dans un cube, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH} = \vec{w}$.
 - $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
 - $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
 - $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\vec{v} - \vec{u} + \vec{w}$.
 - $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{CG} = -\vec{w}$, donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$.
- $\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$.
- Chasles : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FI}$. Or $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \vec{u} + \vec{w}$ et $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\vec{v}$.

Conclusion : $\overrightarrow{AI} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$.

B2.

- $\overrightarrow{AB}(4-1; 0+2; -1-3) = (3; 2; -4)$ et $\overrightarrow{AC}(-2-1; 5+2; 2-3) = (-3; 7; -1)$.
 - $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}(6+9; 4-21; -8+3)$, soit $(15; -17; -5)$.
 - $M\left(\frac{4-2}{2}; \frac{0+5}{2}; \frac{-1+2}{2}\right) = \left(1; \frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
 - $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Avec $D(x; y; z) : \overrightarrow{DC}(-2-x; 5-y; 2-z) = (3; 2; -4)$, d'où $x = -5, y = 3, z = 6$.
- Conclusion :** $D(-5; 3; 6)$. Vérification : $\overrightarrow{DC}(3; 2; -4) = \overrightarrow{AB}$.

B3.

- $\overrightarrow{AB}(3; 2; -4)$ et $\overrightarrow{AC}(9; 6; -12) = 3\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs sont colinéaires.
Conclusion : A, B, C sont alignés.
- $\overrightarrow{AD}(6; 5; -10)$. Si $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$, la première coordonnée donne $k = 2$, mais alors la deuxième serait $2 \times 2 = 4 \neq 5$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.
Conclusion : A, B, D ne sont pas alignés.
- $\overrightarrow{AE}(m-2; 4; n-4)$. $E \in (AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB} : m-2 = 3k, 4 = 2k, n-4 = -4k$. La deuxième équation donne $k = 2$, puis $m = 8$ et $n = -4$.
Conclusion : $m = 8$ et $n = -4$.

B4.

- Si $\vec{v} = k\vec{u}$, la deuxième coordonnée donne $0 = -k$, donc $k = 0$ et $\vec{v} = \vec{0}$, faux. Si $\vec{u} = k\vec{v}$, la deuxième coordonnée donne $-1 = 0$, faux. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
- On cherche a, b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} : 4 = 2a + b, -1 = -a, 7 = a + 3b$. La deuxième équation donne $a = 1$, la première $b = 2$. Troisième équation : $1 + 3 \times 2 = 7$, vérifiée.
Conclusion : $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$, donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.
- On cherche a, b tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} : 4 = 2a + b, -1 = -a, 5 = a + 3b$. On obtient $a = 1, b = 2$, mais la troisième équation donne $1 + 6 = 7 \neq 5$. Le système n'a pas de solution.
Conclusion : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ ne sont pas coplanaires.

B5.

- $$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$
- $t = 1 : (5; -1; 2)$. $t = -1 : (-1; -1; 6)$. $t = 2 : (8; -1; 0)$.
- Pour $x = 5 : 5 = 2 + 3t$ donne $t = 1$. On a bien $y = -1$, mais $z = 4 - 2 = 2 \neq 3$.
Conclusion : $C \notin d$.

4. $\overrightarrow{PQ}(3; -2; 4)$ est un vecteur directeur de (PQ) , qui passe par $P : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. Pour $t = -1 : (-2; 5; -6)$.

B6.

- Le vecteur directeur de d est $\vec{u}(2; -1; 4)$ et $(-4; 2; -8) = -2\vec{u}$: il est colinéaire à $\vec{u}$, non nul.
Conclusion : affirmation vraie.
- $x = 5$ donne $1 + 2t = 5$, soit $t = 2$. Alors $y = 3 - 2 = 1$ (conforme), mais $z = -2 + 8 = 6 \neq 7$.
Conclusion : affirmation fausse ($B \notin d$).
- Δ a pour vecteur directeur $(2; -1; 4) = \vec{u}$: les droites sont parallèles. Le point $(5; 1; 6)$ de Δ ($s = 0$) appartient à d : pour $t = 2$, on obtient $(5; 1; 6)$.
Conclusion : affirmation vraie, Δ et d sont confondues.

B7.

- Si $\vec{v} = k\vec{u}$, la première coordonnée donne $k = 2$, mais alors $1 = -4$ pour la deuxième : faux. Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, donc d et d' ne sont pas parallèles.
- Points de $d : (2 + t; 1 - 2t; -1 + t)$; points de $d' : (1 + 2s; -2 + s; -2 + 2s)$. Système : $2 + t = 1 + 2s$, $1 - 2t = -2 + s$, $-1 + t = -2 + 2s$. La première donne $t = 2s - 1$. La deuxième devient $1 - 4s + 2 = -2 + s$, soit $s = 1$, puis $t = 1$. Troisième équation : $-1 + 1 = 0 = -2 + 2$, vérifiée.
Conclusion : d et d' sont sécantes au point $(3; -1; 0)$.
- Points de $d'' : (1 + 2s; -2 + s; -1 + 2s)$. Les deux premières équations donnent encore $s = 1$, $t = 1$, mais la troisième est $-1 + t = -1 + 2s$, soit $0 = 1$: fausse. Le système n'a pas de solution.
Conclusion : d et d'' ne sont pas sécantes. Elles ne sont pas parallèles non plus : elles sont non coplanaires.

B8.

- $\overrightarrow{AB}(-1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 0; 1)$. Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, la troisième coordonnée donne $1 = 0$: faux. Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, la deuxième coordonnée donne $1 = 0$: faux. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : A, B, C ne sont pas alignés et définissent le plan (ABC) .
- $\overrightarrow{AD}(2; -1; -1)$. On cherche a, b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} : 2 = -a - b, -1 = a, -1 = b$. Les deux dernières équations donnent $a = b = -1$; la première est vérifiée ($1 + 1 = 2$).
Conclusion : $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, donc $D \in (ABC)$.
- $\overrightarrow{AE}(1; 1; 1) : 1 = -a - b, 1 = a, 1 = b$ donne $a = b = 1$, puis $-a - b = -2 \neq 1$. Le système n'a pas de solution.
Conclusion : $E \notin (ABC)$.

B9.

- $B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), E(0; 0; 1), F(1; 0; 1), H(0; 1; 1)$. Donc $\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$.
- $\overrightarrow{EF}(1; 0; 0) = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EH}(0; 1; 0) = \overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires : $(EFH) = (E; \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH})$. Or $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}$.
Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est combinaison linéaire de la base du plan (EFH) : la droite (BD) est parallèle au plan (EFH) .
- $\overrightarrow{EB}(1; 0; -1)$. Si $\overrightarrow{EB} = a\overrightarrow{EF} + b\overrightarrow{EH} = (a; b; 0)$, la troisième coordonnée donne $-1 = 0$: impossible. Donc $B \notin (EFH)$.
Conclusion : (BD) est strictement parallèle au plan (EFH) .

B10.

- vecteur(P, Q) = (2, 1, 3), vecteur(P, R) = (6, 3, 9) et vecteur(P, S) = (4, 2, 5).
- Pour alignes(P, Q, R) : avec $\vec{u} = (2, 1, 3)$ et $\vec{v} = (6, 3, 9)$, on a $1 \times 9 - 3 \times 3 = 0, 3 \times 6 - 2 \times 9 = 0$ et $2 \times 3 - 1 \times 6 = 0$. Les trois conditions sont vraies : la fonction renvoie True (en effet $\overrightarrow{PR} = 3\overrightarrow{PQ}$). Pour alignes(P, Q, S) : avec $\vec{v} = (4, 2, 5)$, $u_1 v_2 - u_2 v_1 = 1 \times 5 - 3 \times 2 = -1 \neq 0$. La première

condition est fausse : la fonction renvoie **False**.

Conclusion : P, Q, R sont alignés, P, Q, S ne le sont pas.

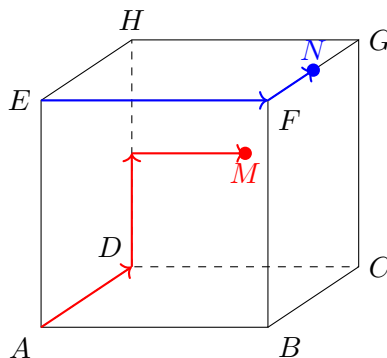
3. Avec $u = (0, 0, 0)$, les trois expressions sont nulles : la fonction renvoie **True**. Cela illustre la propriété : le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

B11.

1. La translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ envoie un point M sur le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AD}$. Dans le cube, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$, donc $t(A) = D$, $t(B) = C$, $t(E) = H$ et $t(F) = G$. L'image de la droite (AB) est la droite parallèle passant par D : c'est (DC) . L'image de la face $ABFE$ est la face $DCGH$.
2. t' a pour vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Alors $t'(A) = C$ et $t'(E) = G$ car $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. L'image de $[AE]$ est $[CG]$.
3. $A' = A + \vec{w} = (3; 1; 8)$ et $B' = B + \vec{w} = (2; -2; 9)$. Alors $\overrightarrow{A'B'}(-1; -3; 1)$ et $\overrightarrow{AB}(0-1; -1-2; 4-3) = (-1; -3; 1)$: les deux vecteurs sont égaux (une translation conserve les vecteurs). L'antécédent de O est le point P tel que $P + \vec{w} = O$, soit $P(-2; 1; -5)$.

B12.

1. On part de A et on ajoute les vecteurs successivement : $A \rightarrow D$ (ajout de $\vec{v}$), puis le milieu de $[DH]$ (ajout de $\frac{1}{2}\vec{w}$), puis (ajout de $\frac{1}{2}\vec{u}$) le centre de la face $DCGH$.



M est le centre de la face $DCGH$ (milieu de $[DG]$). Pour N : $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$, donc N est le milieu de $[FG]$.

2. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG})$: $\overrightarrow{AG}$ n'est pas dans le plan (ABD) , base. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$: les trois vecteurs sont dans le plan (ABC) de la face $ABCD$, coplanaires : ce n'est pas une base. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE})$: les trois vecteurs sont dans le plan de la face $ABFE$, ce n'est pas une base. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AE})$: $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABD) et $\overrightarrow{AE}$ n'est pas dans ce plan, c'est une base.
3. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABF) : ils forment une base de ce plan. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires ($\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$) : ils ne forment pas une base.
4. $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\vec{v} + \vec{u} + \vec{w} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$. Dans le plan (ABC) , $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{BD} = -\vec{u} + \vec{v}$, donc $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + 0 \times \overrightarrow{AE}$.