

# Fiche 4 : problèmes classiques de géométrie dans l'espace

---

Six exercices de synthèse, les grands classiques du chapitre :

- le théorème du toit dans une pyramide ;
- des plans parallèles dans un cube ;
- les segments joignant les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre ;
- la diagonale d'un cube coupée par deux plans ;
- un script Python d'alignement ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- propriétés de parallélisme citées avec leurs hypothèses ;
- relations vectorielles écrites et conclues ;
- coordonnées, système, point d'intersection ;
- conclusion en termes de positions relatives.

## Comment attaquer un problème de solide

1. **Choisis un repère** adapté (souvent  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  pour un cube) ou une **base** (les trois arêtes issues d'un sommet).
2. **Exprime les points ou vecteurs demandés** dans cette base ou dans ce repère.
3. Pour une **intersection sans coordonnées**, pense au **théorème du toit**.
4. Pour un **alignement ou une coplanarité**, écris la **relation vectorielle**.
5. **Conclus** avec la propriété : « colinéaires, donc alignés », « parallèle à une droite du plan, donc parallèle au plan ».

## Les pièges classiques

- Utiliser le théorème du toit sans **vérifier que les plans sont sécants** et distincts.
- Croire que deux plans qui ont deux droites parallèles sont parallèles (c'est faux : ce sont deux droites **de chaque plan** qui doivent être sécantes).
- Se contenter d'une figure pour affirmer un alignement.
- Oublier de dire qu'un point n'appartient pas à un plan quand on veut « strictement parallèle ».

**Exercice 1 (★★) : le théorème du toit dans une pyramide**

$SABCD$  est une pyramide de sommet  $S$ , dont la base  $ABCD$  est un parallélogramme. Les points  $S, A, B, C, D$  ne sont pas coplanaires.

1. Montrer que les plans  $(SAB)$  et  $(SCD)$  sont sécants, et déterminer leur intersection.
2. Déterminer de même l'intersection des plans  $(SAD)$  et  $(SBC)$ .

**Exercice 2 (★★) : plans parallèles dans un cube**

Dans le cube  $ABCDEFGH$ , montrer que les plans  $(BDE)$  et  $(CFH)$  sont parallèles, et strictement parallèles.

**Exercice 3 (★★★) : les trois segments d'un tétraèdre**

$ABCD$  est un tétraèdre. On note :

- $I$  et  $J$  les milieux de  $[AB]$  et  $[CD]$  ;
- $K$  et  $L$  les milieux de  $[AC]$  et  $[BD]$  ;
- $M$  et  $N$  les milieux de  $[AD]$  et  $[BC]$ .

On rappelle que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$  est une base de l'espace.

1. Exprimer dans cette base les vecteurs  $\overrightarrow{AI}$  et  $\overrightarrow{AJ}$ , puis  $\overrightarrow{AP}$  où  $P$  est le milieu de  $[IJ]$ .
2. Faire de même pour le milieu  $Q$  de  $[KL]$  et le milieu  $R$  de  $[MN]$ .
3. Conclure.

**Exercice 4 (★★★) : la diagonale d'un cube coupée par deux plans**

Dans le cube  $ABCDEFGH$ , on munit l'espace du repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ . Les plans  $(BDE)$  et  $(CFH)$  sont ceux de l'exercice 2.

1. Donner les coordonnées de  $A, B, D, E, C, F, G, H$ .
2. Déterminer le point d'intersection  $M_1$  de la droite  $(AG)$  et du plan  $(BDE)$ .
3. Déterminer le point d'intersection  $M_2$  de  $(AG)$  et du plan  $(CFH)$ .
4. Que peut-on dire des segments  $[AM_1]$ ,  $[M_1M_2]$ ,  $[M_2G]$  ?

**Exercice 5 (★★) : un script Python d'alignement**

On utilise les fonctions suivantes (voir le cours) :

```
def vecteur(A, B):
    return (B[0] - A[0], B[1] - A[1], B[2] - A[2])

def colineaires(u, v):
    return (u[1]*v[2] - u[2]*v[1] == 0
            and u[2]*v[0] - u[0]*v[2] == 0
            and u[0]*v[1] - u[1]*v[0] == 0)

def alignes(A, B, C):
    return colineaires(vecteur(A, B), vecteur(A, C))
```

1. Que renvoie `alignes((1,2,3), (3,5,9), (-1,-1,-3))` ? Et `alignes((1,2,3), (3,5,9), (2,3,5))` ? Vérifier avec le calcul.
2. On considère les points  $O(0,0,0)$ ,  $A(1,2,3)$ ,  $B(2,4,6)$ ,  $C(1,0,0)$ ,  $D(3,6,9)$ ,  $E(0,1,0)$ . Écrire un script qui compte les triplets de points alignés parmi ces six points.

**Exercice 6 (★★) : vrai ou faux**

Justifier chaque réponse :

1. Si deux plans distincts contiennent chacun une droite, et si ces deux droites sont parallèles, alors les plans sont parallèles.
2. Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, elle est parallèle à ce plan ou incluse dans ce plan.
3. Dans un tétraèdre, les segments joignant les milieux d'arêtes opposées sont concourants.
4. Si  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ , alors  $A, B, C, D$  sont coplanaires.

**Ce qui peut tomber au bac**

- Une **intersection de plans** avec le théorème du toit (exercice 1).
- Des **plans parallèles** ou une **droite parallèle à un plan** dans un cube (exercice 2).
- Un **problème de tétraèdre** avec base, milieux et relation vectorielle (exercice 3).
- Un **point d'intersection** dans un cube, en coordonnées (exercice 4).
- Un **script Python** sur l'alignement (exercice 5).

## QCM : une seule bonne réponse par question

- Pour montrer que trois points  $I, J, K$  sont alignés, on montre que :
  - $\overrightarrow{IK}$  et  $\overrightarrow{IJ}$  sont orthogonaux
  - $IK = IJ$
  - $\overrightarrow{IK}$  et  $\overrightarrow{IJ}$  sont colinéaires
  - $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{JK}$
- Pour prouver que quatre points sont coplanaires, on cherche :
  - une relation  $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$
  - des vecteurs égaux
  - des vecteurs de même norme
  - un centre de symétrie
- Pour trouver l'intersection de deux droites de paramètres  $t$  et  $s$ , on :
  - calcule les normes des vecteurs directeurs
  - égale les coordonnées et résout le système en  $t$  et  $s$
  - égale les paramètres  $t = s$
  - cherche un point commun sur une figure
- Deux droites de vecteurs directeurs non colinéaires dont le système d'intersection n'a pas de solution sont :
  - parallèles
  - confondues
  - non coplanaires
  - sécantes
- Deux droites de vecteurs directeurs colinéaires sont confondues si :
  - elles ont un point commun
  - leurs vecteurs directeurs sont différents
  - toujours
  - jamais
- Dans l'exercice 1 (théorème du toit), l'intersection des plans  $(SAB)$  et  $(SCD)$  est :
  - le point  $S$  seul
  - la droite  $(AB)$
  - il n'y a pas d'intersection
  - la droite passant par  $S$ , parallèle à  $(AB)$
- Dans l'exercice 3, avec  $I, J$  milieux de  $[AB], [CD]$ ,  $K, L$  milieux de  $[AC], [BD]$  et  $M, N$  milieux de  $[AD], [BC]$ , que peut-on dire des segments  $[IJ], [KL], [MN]$  ?

- A. ils ont la même longueur
  - B. ils sont parallèles entre eux
  - C. ils sont perpendiculaires
  - D. ils ont le même milieu, le centre de gravité du tétraèdre
8. Dans l'exercice 4, les plans  $(BDE)$  et  $(CFH)$  coupent la diagonale  $[AG]$  du cube :
- A. en un seul point, son milieu
  - B. ils ne la coupent pas
  - C. en dehors du segment  $[AG]$
  - D. en deux points qui la partagent en trois segments égaux
9. Dans l'exercice 5, la fonction ``colineaires(u, v)`` teste la colinéarité de deux vecteurs en vérifiant que :
- A. les normes sont égales
  - B. toutes les composantes du produit vectoriel sont nulles
  - C. le produit scalaire est nul
  - D. les vecteurs ont la même première coordonnée
10. Dans l'exercice 5, combien de triplets de points alignés le script affiche-t-il parmi les points testés ?
- A. 3
  - B. 0
  - C. 4
  - D. 6