

Fiche 4 : problèmes classiques de géométrie dans l'espace

Six exercices de synthèse, les grands classiques du chapitre :

- le théorème du toit dans une pyramide ;
- des plans parallèles dans un cube ;
- les segments joignant les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre ;
- la diagonale d'un cube coupée par deux plans ;
- un script Python d'alignement ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- propriétés de parallélisme citées avec leurs hypothèses ;
- relations vectorielles écrites et conclues ;
- coordonnées, système, point d'intersection ;
- conclusion en termes de positions relatives.

Comment attaquer un problème de solide

1. **Choisis un repère** adapté (souvent $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ pour un cube) ou une **base** (les trois arêtes issues d'un sommet).
2. **Exprime les points ou vecteurs demandés** dans cette base ou dans ce repère.
3. Pour une **intersection sans coordonnées**, pense au **théorème du toit**.
4. Pour un **alignement ou une coplanarité**, écris la **relation vectorielle**.
5. **Conclus** avec la propriété : « colinéaires, donc alignés », « parallèle à une droite du plan, donc parallèle au plan ».

Les pièges classiques

- Utiliser le théorème du toit sans **vérifier que les plans sont sécants** et distincts.
- Croire que deux plans qui ont deux droites parallèles sont parallèles (c'est faux : ce sont deux droites **de chaque plan** qui doivent être sécantes).
- Se contenter d'une figure pour affirmer un alignement.
- Oublier de dire qu'un point n'appartient pas à un plan quand on veut « strictement parallèle ».

Exercice 1 (★★) : le théorème du toit dans une pyramide

$SABCD$ est une pyramide de sommet S , dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. Les points S, A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

1. Montrer que les plans (SAB) et (SCD) sont sécants, et déterminer leur intersection.
2. Déterminer de même l'intersection des plans (SAD) et (SBC) .

Correction de l'exercice 1**Question 1**

Les plans sont sécants. Ils ont le point S en commun. Ils ne sont pas confondus : sinon S, A, B, C, D seraient coplanaires, ce qui est exclu.

Donc les plans (SAB) et (SCD) sont sécants suivant une droite Δ passant par S .

L'intersection. La droite (AB) est dans le plan (SAB) et la droite (CD) est dans le plan (SCD) . Comme $ABCD$ est un parallélogramme, (AB) et (CD) sont parallèles.

D'après le **théorème du toit**, l'intersection Δ est parallèle à (AB) et à (CD) .

L'intersection de (SAB) et (SCD) est la droite passant par S et parallèle à (AB) .

Question 2

Les plans (SAD) et (SBC) ont le point S en commun et ne sont pas confondus (sinon S, A, B, C, D seraient coplanaires). Ils sont sécants suivant une droite passant par S .

La droite (AD) est dans (SAD) , la droite (BC) est dans (SBC) , et $(AD) \parallel (BC)$ puisque $ABCD$ est un parallélogramme. D'après le théorème du toit :

L'intersection de (SAD) et (SBC) est la droite passant par S et parallèle à (AD) .

Exercice 2 (★★) : plans parallèles dans un cube

Dans le cube $ABCDEFGH$, montrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles, et strictement parallèles.

Correction de l'exercice 2**Méthode**

On compare les bases des deux plans : on montre que les vecteurs de l'un sont des combinaisons linéaires des vecteurs de l'autre.

Le plan (BDE) . Les points B, D, E ne sont pas alignés : (BDE) est dirigé par $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE})$.

Le plan (CFH) . Les points C, F, H ne sont pas alignés : (CFH) est dirigé par $(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{FC})$.

Les vecteurs.

- $BDHF$ est un rectangle ($\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH}$), donc $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$.
- D'après Chasles : $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}$.

Or $\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$. Donc :

$$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$$

Et $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$. Donc :

$$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$.

Les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.

Ils ne sont pas confondus. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, $\overrightarrow{BC}(0; 1; 0)$. Supposons $C \in (BDE)$: $\overrightarrow{BC} = a\overrightarrow{BD} + b\overrightarrow{BE}$, avec $\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{BE}(-1; 0; 1)$:

$$0 = -a - b, 1 = a, 0 = b$$

Les deux dernières équations donnent $a + b = 1 \neq 0$: contradiction. Donc $C \notin (BDE)$.

Les plans (BDE) et (CFH) sont strictement parallèles.

Exercice 3 (★★★) : les trois segments d'un tétraèdre

$ABCD$ est un tétraèdre. On note :

- I et J les milieux de $[AB]$ et $[CD]$;
- K et L les milieux de $[AC]$ et $[BD]$;
- M et N les milieux de $[AD]$ et $[BC]$.

On rappelle que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est une base de l'espace.

1. Exprimer dans cette base les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$, puis $\overrightarrow{AP}$ où P est le milieu de $[IJ]$.
2. Faire de même pour le milieu Q de $[KL]$ et le milieu R de $[MN]$.
3. Conclure.

Correction de l'exercice 3

Question 1

I est le milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

J est le milieu de $[CD]$: $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

P est le milieu de $[IJ]$: $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ})$.

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

Question 2

Le segment $[KL]$. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$. Pour L , milieu de $[BD]$: $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$. Le milieu Q de $[KL]$ vérifie :

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AL}) = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

Le segment $[MN]$. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$ et, pour N milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Le milieu R de $[MN]$ vérifie :

$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

Question 3

Les trois vecteurs $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AR}$ sont égaux. Donc $P = Q = R$.

Les trois segments $[IJ]$, $[KL]$, $[MN]$ ont le même milieu G , avec $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$. C'est le centre de gravité du tétraèdre.

Exercice 4 (★★★) : la diagonale d'un cube coupée par deux plans

Dans le cube $ABCDEFGH$, on munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Les plans (BDE) et (CFH) sont ceux de l'exercice 2.

1. Donner les coordonnées de A, B, D, E, C, F, G, H .
2. Déterminer le point d'intersection M_1 de la droite (AG) et du plan (BDE) .
3. Déterminer le point d'intersection M_2 de (AG) et du plan (CFH) .
4. Que peut-on dire des segments $[AM_1]$, $[M_1M_2]$, $[M_2G]$?

Correction de l'exercice 4

Question 1

$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $C(1;1;0)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$

Question 2

La droite (AG) est dirigée par $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$: ses points sont $M(t;t;t)$. Le plan (BDE) est dirigé par $\overrightarrow{BD}(-1;1;0)$ et $\overrightarrow{BE}(-1;0;1)$: $M \in (BDE)$ si $\overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BD} + b\overrightarrow{BE}$.

$\overrightarrow{BM}(t-1;t;t)$, donc :

$$t-1 = -a-b, t = a, t = b$$

Les deux dernières donnent $a = b = t$. La première devient $t-1 = -2t$, donc $t = \frac{1}{3}$.

$$M_1\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

Question 3

Le plan (CFH) est dirigé par $\overrightarrow{FH}(-1;1;0)$ et $\overrightarrow{FC}(0;1;-1)$: $M \in (CFH)$ si $\overrightarrow{FM} = a\overrightarrow{FH} + b\overrightarrow{FC}$.

$\overrightarrow{FM}(t-1;t;t-1)$, donc :

$$t-1 = -a, t = a+b, t-1 = -b$$

La première et la troisième donnent $a = b = 1-t$. La deuxième devient $t = 2(1-t)$, donc $t = \frac{2}{3}$.

$$M_2\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

Question 4

$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AM_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. Donc $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{M_2G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

Les plans (BDE) et (CFH) coupent la diagonale $[AG]$ en trois segments de même longueur.

Exercice 5 (★★) : un script Python d'alignement

On utilise les fonctions suivantes (voir le cours) :

```
def vecteur(A, B):
    return (B[0] - A[0], B[1] - A[1], B[2] - A[2])

def colineaires(u, v):
    return (u[1]*v[2] - u[2]*v[1] == 0
            and u[2]*v[0] - u[0]*v[2] == 0
            and u[0]*v[1] - u[1]*v[0] == 0)

def alignes(A, B, C):
    return colineaires(vecteur(A, B), vecteur(A, C))
```

1. Que renvoie `alignes((1,2,3), (3,5,9), (-1,-1,-3))` ? Et `alignes((1,2,3), (3,5,9), (2,3,5))` ? Vérifier avec le calcul.
2. On considère les points $O(0,0,0)$, $A(1,2,3)$, $B(2,4,6)$, $C(1,0,0)$, $D(3,6,9)$, $E(0,1,0)$. Écrire un script qui compte les triplets de points alignés parmi ces six points.

Correction de l'exercice 5**Question 1**

Pour le premier appel : $\overrightarrow{AB}(2;3;6)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;-3;-6)$. Les trois produits en croix sont nuls, donc les vecteurs sont colinéaires.

Le premier appel renvoie True.

Pour le second : $\overrightarrow{AB}(2;3;6)$ et $\overrightarrow{AD}(1;1;2)$. Par exemple $u_1v_2 - u_2v_1 = 2 \times 1 - 3 \times 1 = -1 \neq 0$.

Le second appel renvoie False.

Les deux résultats sont cohérents avec les calculs de la fiche 2.

Question 2

```

from itertools import combinations

points = {
    "O": (0, 0, 0), "A": (1, 2, 3), "B": (2, 4, 6),
    "C": (1, 0, 0), "D": (3, 6, 9), "E": (0, 1, 0),
}

compteur = 0
for trio in combinations(points, 3):
    P, Q, R = (points[nom] for nom in trio)
    if alignes(P, Q, R):
        compteur = compteur + 1
        print(trio)
print(compteur)

```

La fonction `combinations` parcourt les $\binom{6}{3} = 20$ triplets, chacun une seule fois.

Le script affiche 4. Les triplets alignés sont (O, A, B) , (O, A, D) , (O, B, D) , (A, B, D) .

En effet O, A, B, D sont sur la droite de vecteur directeur $(1; 2; 3)$ (car $B = 2A$ et $D = 3A$). Les points C et E n'en font partie d'aucun triplet aligné.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Si deux plans distincts contiennent chacun une droite, et si ces deux droites sont parallèles, alors les plans sont parallèles.
2. Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, elle est parallèle à ce plan ou incluse dans ce plan.
3. Dans un tétraèdre, les segments joignant les milieux d'arêtes opposées sont concourants.
4. Si $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, alors A, B, C, D sont coplanaires.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

Contre-exemple : dans la pyramide de l'exercice 1, (SAB) et (SCD) contiennent les droites parallèles (AB) et (CD) , mais les plans sont sécants.

Faux. Il faudrait **deux droites sécantes** de chaque plan, parallèles deux à deux.

Affirmation 2

Si d est parallèle à une droite δ du plan P , le vecteur directeur de d est colinéaire à celui de δ , donc combinaison linéaire de la base de P .

Vrai.

Affirmation 3

C'est le résultat de l'exercice 3 : les trois segments ont le même milieu.

Vrai.

Affirmation 4

$\overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Si A, B, C sont alignés, les quatre points sont alignés donc coplanaires. Sinon, D est dans le plan (ABC) .

Vrai.

Ce qui peut tomber au bac

- Une **intersection de plans** avec le théorème du toit (exercice 1).
- Des **plans parallèles** ou une **droite parallèle à un plan** dans un cube (exercice 2).
- Un **problème de tétraèdre** avec base, milieux et relation vectorielle (exercice 3).
- Un **point d'intersection** dans un cube, en coordonnées (exercice 4).
- Un **script Python** sur l'alignement (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Pour montrer que trois points I, J, K sont alignés, on montre que :

- A. $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux
- B. $IK = IJ$
- C. $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires (bonne réponse)
- D. $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{JK}$

Justification : Points alignés : les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

2. Pour prouver que quatre points sont coplanaires, on cherche :

- A. une relation $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ (bonne réponse)
- B. des vecteurs égaux
- C. des vecteurs de même norme
- D. un centre de symétrie

Justification : C'est la caractérisation par combinaison linéaire.

3. Pour trouver l'intersection de deux droites de paramètres t et s , on :

- A. calcule les normes des vecteurs directeurs
- B. égale les coordonnées et résout le système en t et s (bonne réponse)**
- C. égale les paramètres $t = s$
- D. cherche un point commun sur une figure

Justification : Un point commun vérifie les trois égalités de coordonnées.

4. Deux droites de vecteurs directeurs non colinéaires dont le système d'intersection n'a pas de solution sont :

- A. parallèles
- B. confondues
- C. non coplanaires (bonne réponse)**
- D. sécantes

Justification : Non parallèles et sans point commun : elles ne sont pas dans un même plan.

5. Deux droites de vecteurs directeurs colinéaires sont confondues si :

- A. elles ont un point commun (bonne réponse)**
- B. leurs vecteurs directeurs sont différents
- C. toujours
- D. jamais

Justification : Parallèles avec un point commun : ce sont la même droite.

6. Dans l'exercice 1 (théorème du toit), l'intersection des plans (SAB) et (SCD) est :

- A. le point S seul
- B. la droite (AB)
- C. il n'y a pas d'intersection
- D. la droite passant par S , parallèle à (AB) (bonne réponse)**

Justification : (AB) et (CD) sont parallèles (côtés du parallélogramme) : l'intersection des deux plans contenant chacune de ces droites passe par leur point commun S et leur est parallèle.

7. Dans l'exercice 3, avec I, J milieux de $[AB], [CD]$, K, L milieux de $[AC], [BD]$ et M, N milieux de $[AD], [BC]$, que peut-on dire des segments $[IJ], [KL], [MN]$?

- A. ils ont la même longueur
- B. ils sont parallèles entre eux
- C. ils sont perpendiculaires
- D. ils ont le même milieu, le centre de gravité du tétraèdre (bonne réponse)**

Justification : Chaque milieu vaut $\frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ dans le repère issu de A : c'est un même point G .

8. Dans l'exercice 4, les plans (BDE) et (CFH) coupent la diagonale $[AG]$ du cube :

- A. en un seul point, son milieu
- B. ils ne la coupent pas
- C. en dehors du segment $[AG]$
- D. en deux points qui la partagent en trois segments égaux (bonne réponse)**

Justification : Les points d'intersection sont $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ et $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$, qui partagent $[AG]$ en trois parties égales.

9. Dans l'exercice 5, la fonction `colineaires(u, v)` teste la colinéarité de deux vecteurs en vérifiant que :

- A. les normes sont égales
- B. toutes les composantes du produit vectoriel sont nulles (bonne réponse)**
- C. le produit scalaire est nul
- D. les vecteurs ont la même première coordonnée

Justification : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul, coordonnée par coordonnée.

10. Dans l'exercice 5, combien de triplets de points alignés le script affiche-t-il parmi les points testés ?

- A. 3
- B. 0
- C. 4 (bonne réponse)**
- D. 6

Justification : Le script trouve les quatre triplets alignés : (O, A, B) , (O, A, D) , (O, B, D) , (A, B, D) .