

Fiche 3 : droites, plans et positions relatives

Huit exercices pour maîtriser les droites et les plans de l'espace :

- représentation paramétrique d'une droite ;
- appartenance d'un point à une droite ;
- positions relatives de deux droites (confondues, parallèles, sécantes, non coplanaires) ;
- position relative d'une droite et d'un plan, point d'intersection ;
- intersection d'une droite et du plan (ABC) ;
- recherche d'un paramètre pour que deux droites soient sécantes ;
- plans parallèles ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- vecteurs directeurs comparés (colinéaires ou non) ;
- système écrit, résolu, **puis vérifié dans la troisième équation** ;
- point d'intersection donné avec ses trois coordonnées ;
- conclusion nommant la position relative.

Le modèle de rédaction de deux droites sécantes

« Les vecteurs directeurs $\vec{u}(1; -1; 2)$ et $\vec{u}'(1; 0; 1)$ ne sont pas colinéaires : les droites ne sont pas parallèles. Cherchons un point commun : on résout

$$1 + t = 2 + s, \quad 2 - t = 1, \quad 2t = 2 + s$$

La deuxième équation donne $t = 1$.

La première donne $s = 0$.

La troisième est vérifiée ($2 \times 1 = 2 + 0$).

Le système admet une unique solution : les droites sont **sécantes** au point de paramètre $t = 1$, c'est-à-dire $I(2; 1; 2)$. »

- Compare d'abord les **vecteurs directeurs**.
- **Utilise deux paramètres différents** (t et s) pour les deux droites.
- Résous avec deux équations, **vérifie la troisième**, puis **donne le point**.

Les pièges classiques

- Utiliser le **même paramètre** t pour les deux droites : on cherche t et s .
- Conclure « sécantes » sans avoir **vérifié la troisième équation**.
- Conclure « non coplanaires » sans avoir montré que les vecteurs directeurs ne sont **pas colinéaires**.
- Dire « parallèle au plan » sans distinguer **incluse** et **strictement parallèle**.

Deux droites non coplanaires, c'est deux avions qui passent au-dessus de la même ville à des altitudes différentes : leurs trajectoires ont l'air de se croiser sur la carte, mais elles ne se rencontrent jamais.

Exercice 1 (★) : représentation paramétrique

On considère la droite d passant par $A(1; -2; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2; 1; -1)$.

1. Donner une représentation paramétrique de d .
2. Donner les coordonnées des points de d obtenus pour $t = 0$, $t = 1$ et $t = -2$.
3. Les points $B(5; 0; 1)$ et $C(2; 0; 1)$ appartiennent-ils à d ?

Exercice 2 (★) : la droite (AB)

On donne $A(1; 0; 2)$, $B(3; 4; -2)$ et $C(4; 6; -4)$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
2. Le point C appartient-il à (AB) ?
3. Déterminer le point d'intersection de (AB) avec le plan (xOy) d'équation $z = 0$.

Exercice 3 (★★) : positions relatives de deux droites

La droite d_1 est donnée par
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 2t \end{cases}$$

Étudier la position relative de d_1 avec chacune des droites :

$$d_2 : \begin{cases} x = 3 + 2s \\ y = -2s \\ z = 4 + 4s \end{cases}$$

$$d_3 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 - s \\ z = 1 + 2s \end{cases}$$

$$d_4 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 \\ z = 2 + s \end{cases}$$

$$d_5 : \begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Exercice 4 (★★) : une droite et un plan

Le plan P passe par $A(1;0;0)$ et est dirigé par $\vec{u}(1;1;0)$ et $\vec{v}(0;1;1)$. Un point $M(x;y;z)$ appartient à P si et seulement si $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Étudier la position relative de P et de chacune des droites :

Δ_1 passant par $(-1;2;1)$, de vecteur directeur $(1;-1;2)$

Δ_2 passant par $(0;0;1)$, de vecteur directeur $(1;2;1)$

Δ_3 passant par $(2;1;1)$, de vecteur directeur $(1;3;2)$

Exercice 5 (★★★) : intersection d'une droite et du plan (ABC)

On donne $A(1;0;2)$, $B(2;1;0)$, $C(0;3;1)$ et la droite d passant par $O(0;0;0)$, de vecteur directeur $\vec{w}(1;1;1)$.

1. Montrer que A , B , C ne sont pas alignés.
2. Déterminer le point d'intersection de d et du plan (ABC) .

Exercice 6 (★★★) : trouver un paramètre

On considère les droites d_1 et d_2 :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$$

$$d_2 : \begin{cases} x = -s \\ y = 3 + s, s \in \mathbb{R}, \text{ où } m \text{ est un réel.} \\ z = m + s \end{cases}$$

1. Montrer que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
2. Déterminer m pour que d_1 et d_2 soient sécantes, et donner alors leur point d'intersection.
3. Que se passe-t-il si $m \neq$ cette valeur ?

Exercice 7 (★★) : deux plans parallèles

Le plan P passe par $A(1; 1; 0)$ et est dirigé par $\vec{u}(1; 0; 1)$ et $\vec{v}(0; 1; 2)$.

Le plan P' passe par $A'(0; 0; 3)$ et est dirigé par $\vec{u}'(2; 1; 4)$ et $\vec{v}'(1; -1; -1)$.

1. Montrer que P et P' sont parallèles.
2. Sont-ils confondus ?

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Deux droites non parallèles de l'espace sont sécantes.
2. Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.
3. Si une droite est parallèle à un plan et possède un point dans ce plan, elle est incluse dans ce plan.
4. Deux plans non parallèles se coupent suivant une droite.
5. Une droite et un plan sans point commun sont parallèles.
6. Deux droites parallèles à un même plan sont parallèles entre elles.

Ce qui peut tomber au bac

- Une **représentation paramétrique** et l'**appartenance d'un point** (exercices 1 et 2).
- La **position relative de deux droites** avec le système en t et s (exercices 3 et 6).
- Une **droite et un plan** : parallèle, incluse ou sécante, avec le point d'intersection (exercices 4 et 5).
- Des **plans parallèles** (exercice 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

- Quelle est une représentation paramétrique de la droite passant par $A(1; 2; 3)$ de vecteur directeur $\vec{u}(1; -1; 2)$?
 - $x = 1 - t, y = 2 + t, z = 3 + 2t$
 - $x = t, y = -t, z = 2t$
 - $x = 1 + t, y = 2 + t, z = 3 + 2t$
 - $x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3 + 2t$
- Deux droites de vecteurs directeurs non colinéaires sont :
 - sécantes ou non coplanaires
 - parallèles
 - confondues
 - jamais sécantes
- Deux droites dont les vecteurs directeurs sont colinéaires sont :
 - parallèles (ou confondues)
 - sécantes en un seul point
 - non coplanaires
 - perpendiculaires
- Deux plans non parallèles se coupent :
 - suivant une droite
 - suivant un plan
 - en un seul point
 - jamais
- Si le vecteur directeur d'une droite est combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires d'un plan, la droite est :
 - parallèle au plan (ou incluse dans le plan)
 - sécante au plan en un seul point
 - orthogonale au plan

- D. non coplanaire avec le plan
6. Dans l'exercice 2, le point $C(4; 6; -4)$ appartient-il à la droite (AB) avec $A(1; 0; 2)$ et $B(3; 4; -2)$?
- A. Oui, pour $t = 1$
- B. On ne peut pas savoir
- C. Oui, pour $t = 3$
- D. Non
7. Dans l'exercice 3, comment sont les droites d_1 et d_2 , dont les vecteurs directeurs $(1; -1; 2)$ et $(2; -2; 4)$ sont colinéaires et qui partagent un point commun ?
- A. non coplanaires
- B. confondues
- C. sécantes en un seul point
- D. strictement parallèles
8. Dans l'exercice 4, la droite Δ_2 est-elle incluse dans le plan P ?
- A. Cela dépend du point choisi
- B. Oui
- C. Non, elle est strictement parallèle
- D. Non, elle est sécante
9. Dans l'exercice 5, en quel point la droite d (passant par O , de vecteur directeur $(1; 1; 1)$) coupe-t-elle le plan (ABC) ?
- A. Elle ne le coupe pas
- B. $(1; 1; 1)$
- C. $(0; 0; 0)$
- D. $\left(\frac{13}{12}; \frac{13}{12}; \frac{13}{12}\right)$
10. Dans l'exercice 6, pour quelle valeur de m les droites d_1 et d_2 sont-elles sécantes ?
- A. $m = 2$
- B. $m = 0$
- C. $m = -2$
- D. Elles ne sont jamais sécantes