

Fiche 3 : droites, plans et positions relatives

Huit exercices pour maîtriser les droites et les plans de l'espace :

- représentation paramétrique d'une droite ;
- appartenance d'un point à une droite ;
- positions relatives de deux droites (confondues, parallèles, sécantes, non coplanaires) ;
- position relative d'une droite et d'un plan, point d'intersection ;
- intersection d'une droite et du plan (ABC) ;
- recherche d'un paramètre pour que deux droites soient sécantes ;
- plans parallèles ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- vecteurs directeurs comparés (colinéaires ou non) ;
- système écrit, résolu, **puis vérifié dans la troisième équation** ;
- point d'intersection donné avec ses trois coordonnées ;
- conclusion nommant la position relative.

Le modèle de rédaction de deux droites sécantes

« Les vecteurs directeurs $\vec{u}(1; -1; 2)$ et $\vec{u}'(1; 0; 1)$ ne sont pas colinéaires : les droites ne sont pas parallèles. Cherchons un point commun : on résout

$$1 + t = 2 + s, \quad 2 - t = 1, \quad 2t = 2 + s$$

La deuxième équation donne $t = 1$.

La première donne $s = 0$.

La troisième est vérifiée ($2 \times 1 = 2 + 0$).

Le système admet une unique solution : les droites sont **sécantes** au point de paramètre $t = 1$, c'est-à-dire $I(2; 1; 2)$. »

- Compare d'abord les **vecteurs directeurs**.
- **Utilise deux paramètres différents** (t et s) pour les deux droites.
- Résous avec deux équations, **vérifie la troisième**, puis **donne le point**.

Les pièges classiques

- Utiliser le **même paramètre** t pour les deux droites : on cherche t et s .
- Conclure « sécantes » sans avoir **vérifié la troisième équation**.
- Conclure « non coplanaires » sans avoir montré que les vecteurs directeurs ne sont **pas colinéaires**.
- Dire « parallèle au plan » sans distinguer **incluse** et **strictement parallèle**.

Deux droites non coplanaires, c'est deux avions qui passent au-dessus de la même ville à des altitudes différentes : leurs trajectoires ont l'air de se croiser sur la carte, mais elles ne se rencontrent jamais.

Exercice 1 (★) : représentation paramétrique

On considère la droite d passant par $A(1; -2; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2; 1; -1)$.

1. Donner une représentation paramétrique de d .
2. Donner les coordonnées des points de d obtenus pour $t = 0$, $t = 1$ et $t = -2$.
3. Les points $B(5; 0; 1)$ et $C(2; 0; 1)$ appartiennent-ils à d ?

Correction de l'exercice 1

Question 1

Le point $M(x; y; z)$ est sur d si et seulement si $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Question 2

Pour $t = 0$: $(1; -2; 3)$, c'est le point A .

Pour $t = 1$: $(1 + 2; -2 + 1; 3 - 1) = (3; -1; 2)$.

Pour $t = -2$: $(1 - 4; -2 - 2; 3 + 2) = (-3; -4; 5)$.

Question 3

Le point B . On cherche t avec la première coordonnée : $5 = 1 + 2t$, donc $t = 2$. On vérifie les deux autres : $y = -2 + 2 = 0$ et $z = 3 - 2 = 1$.

$B \in d$ (pour $t = 2$).

Le point C . La première coordonnée donne $2 = 1 + 2t$, donc $t = \frac{1}{2}$. Pour cette valeur, $y = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \neq 0$.

$C \notin d.$

Exercice 2 (★) : la droite (AB)

On donne $A(1; 0; 2)$, $B(3; 4; -2)$ et $C(4; 6; -4)$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
2. Le point C appartient-il à (AB) ?
3. Déterminer le point d'intersection de (AB) avec le plan (xOy) d'équation $z = 0$.

Correction de l'exercice 2

Question 1

$\overrightarrow{AB}(2; 4; -4)$. Le vecteur $\vec{u}(1; 2; -2) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ dirige aussi la droite.

$$(AB) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Question 2

La première coordonnée donne $4 = 1 + t$, donc $t = 3$. On vérifie : $y = 2 \times 3 = 6$ et $z = 2 - 2 \times 3 = -4$.

$C \in (AB)$ (pour $t = 3$) : les points A , B , C sont alignés.

Question 3

Un point de (AB) est dans le plan $z = 0$ si $2 - 2t = 0$, donc $t = 1$. On reporte : $x = 1 + 1 = 2$ et $y = 2$.

Le point d'intersection est $(2; 2; 0)$.

Exercice 3 (★★) : positions relatives de deux droites

La droite d_1 est donnée par $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 2t \end{cases}$

Étudier la position relative de d_1 avec chacune des droites :

$$d_2 : \begin{cases} x = 3 + 2s \\ y = -2s \\ z = 4 + 4s \end{cases}$$

$$d_3 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 - s \\ z = 1 + 2s \end{cases}$$

$$d_4 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 \\ z = 2 + s \end{cases}$$

$$d_5 : \begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Correction de l'exercice 3**Les vecteurs directeurs**

$$d_1 : \vec{u}_1(1; -1; 2). \quad d_2 : \vec{u}_2(2; -2; 4). \quad d_3 : \vec{u}_3(1; -1; 2). \quad d_4 : \vec{u}_4(1; 0; 1). \quad d_5 : \vec{u}_5(1; 0; 0).$$

Avec d_2

$\vec{u}_2 = 2\vec{u}_1$: les vecteurs directeurs sont colinéaires, les droites sont parallèles. Le point $B(3; 0; 4)$ de d_2 est-il sur d_1 ? $3 = 1 + t$ donne $t = 2$, puis $y = 2 - 2 = 0$ et $z = 2 \times 2 = 4$.

d_1 et d_2 sont confondues.

Avec d_3

$\vec{u}_3 = \vec{u}_1$: les droites sont parallèles. Le point $(2; 1; 1)$ de d_3 est-il sur d_1 ? $2 = 1 + t$ donne $t = 1$, puis $y = 2 - 1 = 1$ mais $z = 2 \times 1 = 2 \neq 1$.

d_1 et d_3 sont strictement parallèles.

Avec d_4

$\vec{u}_1(1; -1; 2)$ et $\vec{u}_4(1; 0; 1)$ ne sont pas colinéaires. On résout :

$$1 + t = 2 + s, \quad 2 - t = 1, \quad 2t = 2 + s$$

La deuxième équation donne $t = 1$. La première donne $s = 0$. La troisième est vérifiée ($2 = 2$).

d_1 et d_4 sont sécantes au point $(2; 1; 2)$ (obtenu pour $t = 1$ et $s = 0$).

Avec d_5

$\vec{u}_1(1; -1; 2)$ et $\vec{u}_5(1; 0; 0)$ ne sont pas colinéaires. On résout :

$$1 + t = s, 2 - t = 0, 2t = 1$$

La deuxième équation donne $t = 2$. La troisième donne $t = \frac{1}{2}$: contradiction. Le système n'a pas de solution.

d_1 et d_5 sont **non coplanaires** (ni parallèles, ni sécantes).

Exercice 4 (★★) : une droite et un plan

Le plan P passe par $A(1; 0; 0)$ et est dirigé par $\vec{u}(1; 1; 0)$ et $\vec{v}(0; 1; 1)$. Un point $M(x; y; z)$ appartient à P si et seulement si $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Étudier la position relative de P et de chacune des droites :

Δ_1 passant par $(-1; 2; 1)$, de vecteur directeur $(1; -1; 2)$

Δ_2 passant par $(0; 0; 1)$, de vecteur directeur $(1; 2; 1)$

Δ_3 passant par $(2; 1; 1)$, de vecteur directeur $(1; 3; 2)$

Correction de l'exercice 4

Méthode

On regarde si le vecteur directeur $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Un point $(x; y; z)$ de P vérifie $x = 1 + a$, $y = a + b$, $z = b$.

La droite Δ_1

Cherchons $\vec{w}(1; -1; 2) = a\vec{u} + b\vec{v} = (a; a + b; b) : a = 1, b = 2$, donc $a + b = 3 \neq -1$. Ce n'est pas possible.

Donc $\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}$ ne sont pas coplanaires : Δ_1 et P sont sécantes.

Cherchons le point d'intersection.

Un point de Δ_1 est $(-1 + t; 2 - t; 1 + 2t)$.

Il est dans P s'il existe a, b tels que :

$$-1 + t = 1 + a, 2 - t = a + b, 1 + 2t = b$$

La première donne $a = t - 2$, la troisième $b = 1 + 2t$. La deuxième devient $2 - t = (t - 2) + (1 + 2t) = 3t - 1$, donc $4t = 3$ et $t = \frac{3}{4}$.

Alors $a = -\frac{5}{4}$ et $b = \frac{5}{2}$. Le point est $\left(-1 + \frac{3}{4}; 2 - \frac{3}{4}; 1 + \frac{3}{2}\right)$.

Δ_1 coupe P au point $\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4}; \frac{5}{2}\right)$.

La droite Δ_2

$\vec{w}(1; 2; 1) = \vec{u} + \vec{v}$: c'est une combinaison linéaire, Δ_2 est parallèle à P . Le point $(0; 0; 1)$ est-il dans P ? $\overrightarrow{AM}(-1; 0; 1) = a\vec{u} + b\vec{v}$ donne $a = -1$, $b = 1$, et $a + b = 0$.

Δ_2 est incluse dans P .

La droite Δ_3

$\vec{w}(1; 3; 2) = \vec{u} + 2\vec{v}$ ($(1; 1 + 2; 2)$) : Δ_3 est parallèle à P . Le point $(2; 1; 1)$ est-il dans P ? $\overrightarrow{AM}(1; 1; 1)$ donne $a = 1$, $b = 1$, mais $a + b = 2 \neq 1$.

Δ_3 est strictement parallèle à P .

Exercice 5 (★★★) : intersection d'une droite et du plan (ABC)

On donne $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(0; 3; 1)$ et la droite d passant par $O(0; 0; 0)$, de vecteur directeur $\vec{w}(1; 1; 1)$.

1. Montrer que A , B , C ne sont pas alignés.
2. Déterminer le point d'intersection de d et du plan (ABC) .

Correction de l'exercice 5

Question 1

$\overrightarrow{AB}(1; 1; -2)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 3; -1)$. Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles ($1 \times 3 \neq 1 \times (-1)$).

A , B , C ne sont pas alignés.

Question 2

Un point M de d s'écrit $(t; t; t)$. Il est dans (ABC) s'il existe a , b tels que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$:

$$t - 1 = a - b$$

$$t = a + 3b$$

$$t - 2 = -2a - b$$

En retranchant la première équation à la deuxième : $1 = 4b$, donc $b = \frac{1}{4}$.

Alors $t = a + \frac{3}{4}$. La troisième équation devient $a + \frac{3}{4} - 2 = -2a - \frac{1}{4}$, donc $3a = 2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{4} = 1$ et $a = \frac{3}{3}$.

$$\text{D'où } t = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12}.$$

$$\text{Vérification de la première équation : } t - 1 = \frac{1}{12} \text{ et } a - b = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

d coupe le plan (ABC) au point $\left(\frac{13}{12}; \frac{13}{12}; \frac{13}{12}\right)$.

Exercice 6 (★★★) : trouver un paramètre

On considère les droites d_1 et d_2 :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$$

$$d_2 : \begin{cases} x = -s \\ y = 3 + s, s \in \mathbb{R}, \text{ où } m \text{ est un réel.} \\ z = m + s \end{cases}$$

1. Montrer que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
2. Déterminer m pour que d_1 et d_2 soient sécantes, et donner alors leur point d'intersection.
3. Que se passe-t-il si $m \neq$ cette valeur ?

Correction de l'exercice 6

Question 1

d_1 a pour vecteur directeur $\vec{u}_1(1; 2; -1)$, d_2 a pour vecteur directeur $\vec{u}_2(-1; 1; 1)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : $\frac{-1}{1} = -1$ mais $\frac{1}{2} \neq -1$.

d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

Question 2

On cherche t et s tels que :

$$2 + t = -s, 1 + 2t = 3 + s, -t = m + s$$

La première donne $s = -2 - t$. La deuxième devient $1 + 2t = 3 - 2 - t = 1 - t$, donc $3t = 0$, $t = 0$ et $s = -2$.

La troisième s'écrit alors $0 = m - 2$, soit $m = 2$.

d_1 et d_2 sont sécantes si et seulement si $m = 2$.

Le point d'intersection est obtenu pour $t = 0$: $(2; 1; 0)$. On le retrouve avec $s = -2$: $(2; 1; 2 - 2) = (2; 1; 0)$

Le point d'intersection est $(2; 1; 0)$.

Question 3

Si $m \neq 2$, le système n'a pas de solution (les deux premières équations imposent $t = 0$ et $s = -2$, et la troisième est fausse).

Les droites d_1 et d_2 sont alors non coplanaires.

Exercice 7 (★★) : deux plans parallèles

Le plan P passe par $A(1; 1; 0)$ et est dirigé par $\vec{u}(1; 0; 1)$ et $\vec{v}(0; 1; 2)$.

Le plan P' passe par $A'(0; 0; 3)$ et est dirigé par $\vec{u}'(2; 1; 4)$ et $\vec{v}'(1; -1; -1)$.

1. Montrer que P et P' sont parallèles.
2. Sont-ils confondus ?

Correction de l'exercice 7

Question 1

Les vecteurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ ne sont pas colinéaires : $(2; 1; 4)$ et $(1; -1; -1)$ ne sont pas proportionnels.

Le vecteur $\vec{u}'$. On cherche $\vec{u}' = a\vec{u} + b\vec{v} = (a; b; a + 2b) : a = 2, b = 1, a + 2b = 4$. Donc $\vec{u}' = 2\vec{u} + \vec{v}$.

Le vecteur $\vec{v}'$. On cherche $\vec{v}' = (a; b; a + 2b) : a = 1, b = -1, a + 2b = -1$. Donc $\vec{v}' = \vec{u} - \vec{v}$.

Les vecteurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Les plans P et P' sont parallèles.

Question 2

Ils sont confondus si et seulement si $A' \in P$. On a $\overrightarrow{AA'}(-1; -1; 3)$. On cherche a, b tels que $\overrightarrow{AA'} = a\vec{u} + b\vec{v} : a = -1, b = -1$, et $a + 2b = -3 \neq 3$.

Donc $A' \notin P$.

Les plans P et P' sont strictement parallèles (non confondus).

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. Deux droites non parallèles de l'espace sont sécantes.
2. Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.
3. Si une droite est parallèle à un plan et possède un point dans ce plan, elle est incluse dans ce plan.
4. Deux plans non parallèles se coupent suivant une droite.
5. Une droite et un plan sans point commun sont parallèles.
6. Deux droites parallèles à un même plan sont parallèles entre elles.

Correction de l'exercice 8

Affirmation 1

Contre-exemple : d_1 et d_5 de l'exercice 3 ne sont pas parallèles et ne se coupent pas (droites non coplanaires).

Faux.

Affirmation 2

On peut changer le point de départ (n'importe quel point de la droite) et le vecteur directeur (n'importe quel multiple non nul).

Vrai.

Affirmation 3

Si d est parallèle à P , son vecteur directeur est combinaison linéaire d'une base de P . Si d possède un point $A \in P$, alors tout point $A + t\vec{u}$ est aussi dans P .

Vrai.

Affirmation 4

Deux plans non parallèles (et donc non confondus) ne peuvent pas être disjoints. Leur intersection est une droite.

Vrai.

Affirmation 5

Si la droite n'était pas parallèle au plan, elle le couperait en un point (vecteur directeur non coplanaire avec la base du plan). Sans point commun, elle est donc strictement parallèle au plan.

Vrai.

Affirmation 6

Contre-exemple : dans un cube, les droites (AB) et (AD) sont parallèles au plan (EFG) , mais elles sont sécantes en A .

Faux.

Ce qui peut tomber au bac

- Une **représentation paramétrique** et l'**appartenance d'un point** (exercices 1 et 2).
- La **position relative de deux droites** avec le système en t et s (exercices 3 et 6).
- Une **droite et un plan** : parallèle, incluse ou sécante, avec le point d'intersection (exercices 4 et 5).
- Des **plans parallèles** (exercice 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est une représentation paramétrique de la droite passant par $A(1; 2; 3)$ de vecteur directeur $\vec{u}(1; -1; 2)$?

- A. $x = 1 - t, y = 2 + t, z = 3 + 2t$
 B. $x = t, y = -t, z = 2t$
 C. $x = 1 + t, y = 2 + t, z = 3 + 2t$
 D. $x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3 + 2t$ (**bonne réponse**)

Justification : $M = A + t\vec{u}$: on ajoute t fois chaque coordonnée du vecteur directeur.

2. Deux droites de vecteurs directeurs non colinéaires sont :

- A. **sécantes ou non coplanaires** (**bonne réponse**)
 B. parallèles
 C. confondues
 D. jamais sécantes

Justification : Dans l'espace, deux droites non parallèles peuvent être sécantes ou non coplanaires.

3. Deux droites dont les vecteurs directeurs sont colinéaires sont :

- A. **parallèles (ou confondues)** (**bonne réponse**)
 B. sécantes en un seul point
 C. non coplanaires
 D. perpendiculaires

Justification : La colinéarité des vecteurs directeurs caractérise le parallélisme.

4. Deux plans non parallèles se coupent :

A. **suivant une droite (bonne réponse)**

B. suivant un plan

C. en un seul point

D. jamais

Justification : Leur intersection est une droite.

5. Si le vecteur directeur d'une droite est combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires d'un plan, la droite est :

A. **parallèle au plan (ou incluse dans le plan) (bonne réponse)**

B. sécante au plan en un seul point

C. orthogonale au plan

D. non coplanaire avec le plan

Justification : La droite a une direction contenue dans le plan.

6. Dans l'exercice 2, le point $C(4; 6; -4)$ appartient-il à la droite (AB) avec $A(1; 0; 2)$ et $B(3; 4; -2)$?

A. Oui, pour $t = 1$

B. On ne peut pas savoir

C. **Oui, pour $t = 3$ (bonne réponse)**

D. Non

Justification : En résolvant $1 + t = 4$, $2t = 6$, $2 - 2t = -4$: les trois équations donnent $t = 3$, donc $C \in (AB)$.

7. Dans l'exercice 3, comment sont les droites d_1 et d_2 , dont les vecteurs directeurs $(1; -1; 2)$ et $(2; -2; 4)$ sont colinéaires et qui partagent un point commun ?

A. non coplanaires

B. **confondues (bonne réponse)**

C. sécantes en un seul point

D. strictement parallèles

Justification : Vecteurs directeurs colinéaires (parallèles) et un point commun : les droites sont confondues.

8. Dans l'exercice 4, la droite Δ_2 est-elle incluse dans le plan P ?

A. Cela dépend du point choisi

B. **Oui (bonne réponse)**

C. Non, elle est strictement parallèle

D. Non, elle est sécante

Justification : Le vecteur directeur de Δ_2 est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et un point de Δ_2 vérifie l'équation du plan : la droite est incluse dans P .

9. Dans l'exercice 5, en quel point la droite d (passant par O , de vecteur directeur $(1; 1; 1)$) coupe-t-elle le plan (ABC) ?

- A. Elle ne le coupe pas
- B. $(1; 1; 1)$
- C. $(0; 0; 0)$
- D. $\left(\frac{13}{12}; \frac{13}{12}; \frac{13}{12}\right)$ (bonne réponse)

Justification : On substitue $M = O + t(1,1,1)$ dans l'équation du plan (ABC) et on résout en t : on trouve $t = \frac{13}{12}$.

10. Dans l'exercice 6, pour quelle valeur de m les droites d_1 et d_2 sont-elles sécantes ?

- A. $m = 2$ (bonne réponse)
- B. $m = 0$
- C. $m = -2$
- D. Elles ne sont jamais sécantes

Justification : En résolvant le système des deux représentations paramétriques, on trouve une solution seulement pour $m = 2$, au point $(2; 1; 0)$.